This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

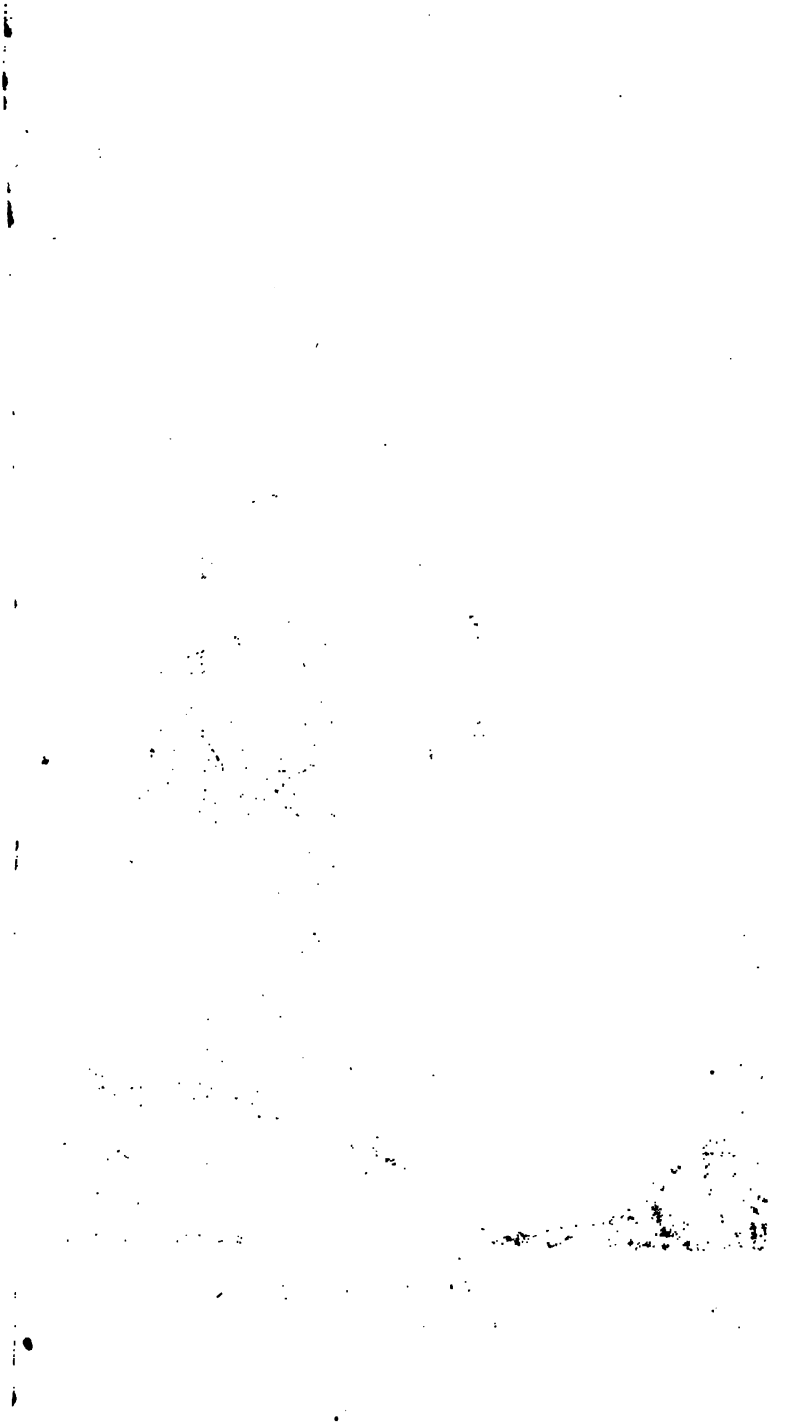
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

3 3433 06909521 8



Vestigia hominum video.

Aristip. apud Diog. Laert. *Jac. Merceus Sculp.*

TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PLANÆ, ET SPHÆRICÆ

AUCTORE

ANTONIO LECCHIO

E SOCIETATE JESU

MATHESEOS PROFESSORE

IN UNIVERSITATE BRAYDENSI.

MEDIOLANI MDCCLVI.

EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROSIANÆ

APUD JOSEPH MARELLUM

SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.

-10368-
ASTOR LIBRARY
JUN
20
1892
NEW YORK

R.P. Aloysius Centurionus
Genuensis Præpositus Gen.
Soc. Jesu.

OPTIMO PATRI NOSTRO

ALOYSIO CENTURIONI

PRÆPOSITO GENERALI

SOCIETATIS JESU.

QUum primum Te Societati noſtræ præpoſitum fuiſſe nunciatum eſt, tametſi omnes magna voluptas incredibiliſque ſpes cœpit, quod nemini non erat cognita Tuæ erecta vis mentis amplitudoque animi, rerum quas geſſeras, multis magniſ-

gniſque conſiliis explicata: tamen Provincia Mediolanenſis ſibi potiſſimum lætandum putavit, quod alterum Societati Præpoſitum continenter ipſa ſuffeciſſet; Teque inprimis, cujus præſentem ſapientiæ virtutiſque imaginem integram atque recentem in animis haberemus. Sed omnino Univerſitas hæc Braydenſis jucundiſſimum præcepit ſuavitatis ſenſum; neque propterea ſolum, quod Te vix juventutem adepto humaniorum litterarum Profeſſore uſam ſe meminiſſet, ſed majorem in modum, quod Provinciam ante quinquennium quum moderarere, atque hanc Academiam inviſeres, ſtudia omnium noſtrum mira humanitate incenderis. Quæ humanitas quum tua ſemper fuit ac propria erga omnes, tum ſingularis plane erga eos patuit, qui perpetuo infinitoque labore Scholarum muniis tradendiſque diſciplinis exercentur. Quos autem ſciebas ſtudere præterea atque eniti, ut paullo fructuoſiorem Societati Reique publicæ operam darent ſcribendo, eos & benevolentiſſimo amplexus es animo, & cohorta-

hortatione plurimum excitaſti ad præclaram laudem; qua in re nemo ſapiens Tuæ conſilium humanitatis non magnopere laudandum cenſuerit; quamvis enim noſtrates, ab ingenio quiſque ſuo, animos capiunt, animi autem fructus utilitatiſque publicæ ſpe incenduntur, quin ſpem aliam præmiumque expectare deceat aut vero petere: tamen ſi eorum, qui præſunt, favor & gratia accedat, ita uſuvenit, ut alacrius ſibi unuſquiſque enitendum putet; atque ita Te prædicantem audivimus, ſi quis bonos auctores ſequitur, in humanis quidem rebus eſſe expetendum, ſed illorum, qui moderantur, benevolentiam ceteris omnibus laudibus multo pluris a nobis fieri ſolere; & vero religioſiſſimo, non ſolum ſapientiſſimo conſilio; namque, ſi Moderatoribus parendo, paremus Deo, ſane videmur Deo placere, quum iiſdemmet placemus. Itaque etiam videmus nunquam tantam copiam doctiſſimorum Virorum in Societate fuiſſe, qui ſcribendo nomen noſtrum gloria honoraverunt,

quam

quam quum Moderatores extiterunt, qui voluntate proſequerentur hujuſcemodi genus hominum, qui in libris impalleſcentes, ac pulvere, improbi laboris ſatietate, obſcuri & taciti contabeſcunt. Neque hæc eo dico quod me putem in eorum numero eſſe collocandum; Memet novi probe meique ingenii vires, quam ſint exiguæ, ſane quidem & magis omnibus ſentio; Sed Tibi, quoniam meus inſumptus labor in aliis operibus tantum probatus eſt, ut etiam adderes animum, hortatorque gravis accederes; & parui tum, atque hos jam cenſeo, quos poſtremo confeci calamo, de Trigonometria libros deberi Tibi, cui quum hoc opus inſcriptum leges, velim cogites non magis id meo me nomine facere, quam communi quodam ſtudio Braydenſis Univerſitatis vota repræſentare, ut immortalis Deus Te velit eſſe & privato noſtro & publico Societatis bono diu incolumem.

Joannes Antonius Lecchius.

PROEMIUM.

QUEMADMODUM Planorum, ac Solidorum Geometria tractaretur, ſatis explicatum arbitror ſuperioribus Elementis. Sequitur, ut, quæ proxima erat Elementorum pars, Trigonometriam planam, ac ſphæricam complectar; cujus tractationem a me flagitarunt plerique, opinione fortaſſe nonnulla, quam de ſuperioribus Libris habebant. Itaque feci non invitus, ut horum voluntati ne deeſſem; non ut aliquid huic facultati novi adjicerem, ſed ut ea, quæ in Scriptoribus diſperſa, atque infinita viderentur eſſe, ratione, & diſtributione ſub uno aſpectu ponerentur. De quibus dicere aggrediar, ſi pauca prius de inſtituto, ac de judicio meo dixero. Nam eorum, qui antea Trigonometriam tradiderunt, quamvis par pæne laus ſit, & ſcribendi gloria; omnes tamen, alius aliò, delapſi ſunt; ac pro ſe quiſque, utì ſunt multæ in naturis hominum, & ingeniis diſſimilitudines, eam methodum ſecutus eſt, quam privatim adamaverat. *In omni autem re*, monet Tullius, *difficillimum eſt for-*

mam aſſequi optimi: quòd aliud aliis videtur, ac ſuo quiſque ſtudio maximè ducitur. Sunt qui Epitomes trigonometricas concinnavere magna cum laude; ſed, quantulùm experiundo didici, nihil hæ ferme docent ſine magiſtro. Obeſt in his nimiùm conciſa brevitas: quo vitio laborant interdum ingenioſiſſimi quique Scriptores. *Nam, quò quiſque eſt ſolertior, & ingenioſior*, inquit Tullius, *hòc docet iracundiùs, & feſtinantiùs; ac quod ipſe celeriter arripuit, id ab aliis eodem impetu percipi poſſe putat*. Sunt qui Trigonometriâ planâ contenti, ſphæricam omiſerunt, ſine qua quivis unus certò pedem figere nunquam poterit aut in cæleſtibus, aut etiam in terreſtribus. Alii utramque Trigonometriam complexi, de logarithmorum mirifico invento prorſus ſilent; tum quæ ad Tabularum conſtructionem ſpectant, vel curſim docent, vel ad alios Scriptores remittunt: quæ curſitatio, ac veluti fluctuatio modò huc, modò illuc, nimium, quantùm Tirones diſtrahit, quibus conſultiùs eſſet eodem duce curſum currere eumdem, ac jugi tenore ad hujus facultatis caput, fontemque pervenire.

Neque etiam iis aſſentior, qui ea nuper ſentire cœperunt, quæ doleo jam probari in vulgus; quique in ea hæreſi ſunt, ut putent in ſcientia omnium principe demonſtrationum ſalebras omitti oportere: caput eſſe ad benè, aptèque docendum, ſi ex ſingulis Matheſeos partibus excerpas praxes, ut vocant, præcipuas, unde unde proficiſcantur. Ajunt hac arte comparari eam, quam ipſi appellant diſcendi, docendique facilitatem. In quo verbo lapſa conſuetudo deflexit de via, ſenſimque eò deducta eſt, ut hiſce lenociniis quæratur latebra inſcitiæ: quem locum breviter perſtrinxi ſuperiore Libro. Conferamus igitur in pauca; & quoniam ab hac laude rigidè omnia demonſtrandi proficiſcitur Geometria, & quidquid eſt, ex hoc eſt;

abſurdè

abſurdè facerem, ſi ab ea, quam hactenus tenueram, methodo in hac Trigonometriæ tractatione diſcederem.

Denique ferè omnes Scriptores in theoria luculenter tradenda toti ſunt; uſum, exercitationemque trigonometrici calculi omittunt: quæ res multorum ingenia, progreſſionemque retardat. *Nam, quemadmodum*, inquit Tullius lib. 1. de Officiis, *nec Medici, nec Imperatores, nec Oratores, quamvis artis præcepta perceperint, quidquam magna laude dignum ſine uſu, & exercitatione conſequi poſſunt;* Sic utriuſque Trigonometriæ theoremata demonſtrantur quidem egregiè, ut faciunt plerique; ſed rei magnitudo uſum, exercitationemque deſiderat. Quos enim ſtimulos adoleſcenti addit ad theoriam ipſam diſcendam, ſi duci ſtatim ſe ſentiat ope Trigonometriæ ad dimetiendam ſtellarum diſtantiam a terra, motum, ac magnitudinem globi terraquei, ad tot Geodeſiæ inſtrumenta, ac praxes, ad Iridis etiam, ac pleraque alia in Matheſi mixtà phœnomena? Quantò alacriùs theoriam ipſam complectitur, quam frugiferam adeò, & humanis uſibus aptam experitur? At, inquiet aliquis, per ſe ipſi Tirones hunc fructum demetere poſſunt. Audio, ſi paribus omnes ad diſcendum ſtimulis comparati eſſent a natura. Sed, utì in omnibus officiis tribuendis monebat Tullius, quæri oportere, quid cuique maximè neceſſe ſit, & quid quiſque, vel ſinè nobis, aut poſſit conſequi, aut non poſſit; ita & in tradendis diſciplinis. Complures fatigat, ac ferme abjicit iter illud in theoria directum, quamvis multò brevius; quin imò diverticulis reficiuntur; ſeque ipſos probant, an ſatis habeant virium in theoriæ uſu. Neque tamen ita deducendi ſunt in alienarum facultatum poſſeſſionem, ut cœptum iter abrumpant. Neutiquam ſanè. Nam hujus etiam exercitationis adhibendus eſt modus, ad mediocritatemque revocandus, quantùm ſatis eſt,

ut tanquam ex edito colle circumſpiciat pauliſper Tiro, quàm latè pateat Trigonometriæ campus; tum in viam ſe dare ne recuſet. Quemadmodum Virgilianus Heros Sybillæ per campos Elyſios Ænæam deducenti præibat: *Dixit, & antetulit greſſum, camposque nitentes Deſuper oſtentat; dehinc ſumma cacumina linquunt.* Hiſce ad praxim excurſiunculis, ac crebra exercitatione comparatur ea, quæ præceptis omnibus potior eſt, facilitas theoriæ trigonometricæ, qua fit, ut, ſimul ac tibi collibitum fuerit, ad quævis problemata dirimenda alacer, & expeditus tranſilire poſſis.

Habes, amice Lector, inſtituti mei rationem, in qua ſi fortaſſe tibi videar uſque eò moroſus fuiſſe, ut mihi non ſatisfacerent vel ipſi primarum partium Scriptores, neque intra eorum ſepta conſiſterem, ſpero me tibi cauſam probaſſe; cupio quidem certè. De rebus ipſis utere tuo judicio: nihil enim impedio. Hæc tamen ipſa, non tam re, quàm voluntate, qua pluribus prodeſſe poſſem, laudabis, opinor.

PROLEGOMENA.

HActenus quid commodi de me ipſo polliceri poſſint harum artium Studioſi, timidè dixi; quid autem utilitatis polliceri ſibi quiſque poſſit de ipſius Trigonometriæ uſu, paucis dicam. Qua in re juvabit, opinor, Studioſos in hoc primo hujus facultatis aditu prænoſſe, quid impulerit antiquos etiam Geometras, ut novas ſibi methodos quærerent dimetiendarum longitudinum; quibuſve de cauſis non ſatis fiderent Scalæ geometricæ, aliiſque Inſtrumentis, quæ tom. 1. Geometriæ deſcripſimus: unde *aut neceſſitas, aut origo Trigonometriæ* affulſerit; & quo progreſſu, & inventis amplificata fuerit *Sinuum cognitio, Tangentium, atque Secantium*, quantamque in rebus tam aſtronomicis, quàm geometricis utilitatem attulerit. Præſtat enim interdum nedum facultates ipſas, ſed illarum quoque ortus cognoſcere, progreſſioneſque mirabiles.

1. *Trigonometria rectilinea eſt ea Geometriæ pars, quæ triangula rectilinea conſiderat dumtaxat reſpectu laterum, & angulorum, quin ullam habeat rationem ſpatii, quod illa comprehendunt.* Hæc autem abunde a nobis tractata ſuperioribus Elementis videri poterat, ubi complures methodos demonſtravimus, quibus cognoſci poſſent latera, & anguli trianguli cujuſvis. Erat quidem in illis Elementis mira facilitas theoriæ, quæ in primam elementariam inſtitutionem opportunè cadit; ſed, ſi a ſimplici theoria ad praxim deducantur, labant interdum, neque iis fidere tutò poſſumus, aut debemus.

Quod ut uno, aut altero exemplo illuſtrem, quid planius, aut ſimplicius in longitudinum menſuris capiendis excogitari poterat, quàm diviſio Scalæ geome-

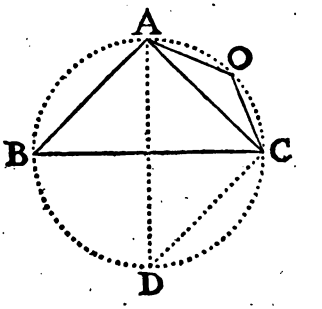
tricæ? At, quamvis in hoc Inſtrumento rite conſtruendo diligentia adhibeatur artificis, quàm quæ maxima poſſit; nihil tamen rarius, quàm exactam diviſionem obtinere; in qua vel leviſſimus quiſque error abnormem, & vix ferendam in praxi varietatem inducit. Quoties enim Scalæ ſimplicis particulæ ſingulæ in charta, repræſentant ſingulas in campo leucas? At quàm facilè in aliquam ex tam minutulis Scalæ diviſionibus irrepere poteſt ſolius centeſimæ partis error, qui vix ſenſu deprehendi in Inſtrumento poſſet? Error autem ſolius centeſimæ partis leucæ gallicæ, quam repræſentare jubetur Scalæ particula, errorem inducit hexapedarum 21. Eſt & alia complurium aberrationum origo, dum jubemur angulos per Inſtrumenta inventos in chartam transferre, ac deſcribere, ut ſimilia triangula conſtruantur: in qua operatione error vel minimus in quantitate angulorum exhibenda commiſſus, mirum, quantùm praxim omnem turbet, atque incertam reddat, præſertim in maximis diſtantiis determinandis.

2. Quare Geometrarum induſtria eò ſe vertit, ut certius ſibi ſubſidium dimetiendarum longitudinum ab alia theoria pararent, in qua, quibuſdam datis in triangulo rectilineo, reliqua poſſent determinare. Ac primò (ut eorum indaginem quadam veriſimilitudine conſecter, & Tironibus adumbrem), cùm triangulum omne tribus angulis conſtet, ac tribus lateribus, hæc omnium prima fortaſſe ſuſpicio movit aliquos, ut quærerent, an aliqua conſtans eſſet ratio inter angulos, & latera: exploratum quippe jam ipſis erat majori angulo opponi latus majus, & viciſſim, in eodem triangulo. Si verò ratio conſtans inveniri poſſet, uberrimus hinc fructus oriebatur; qui enim in uno triangulo ſupputabatur calculus, idem aptari poterat reliquis omnibus huic ſimilibus. Quare huc tandem quæſtio omnis recidebat:

debat: *An determinari poſſet, certaque lege definiri ratio, quæ haberetur inter latera, & angulos ejuſdem trianguli*. Nam quamvis angulus, & linea ſint quantitates heterogeneæ, tamen ratio unius lineæ ad aliam jurè comparari poteſt cum ratione unius anguli ad alium; ita ut, quemadmodum linea eſſe poteſt dupla, vel tripla alterius, ita & angulus duplus, vel triplus alterius; atque hinc per hæc veſtigia examinari poterat problema: *An latera trianguli eſſent inter ſe, uti anguli oppoſiti iiſdem lateribus*.

3. Ponatur itaque triangulum iſoſceles ABC rectangulum, cujus latus AB = lateri AC, & angulus A duplus anguli B = C. Jam verò, ſi anguli cujuſvis trianguli haberent inter ſe proportionem eamdem, quam habent latera iiſdem angulis oppoſita, quoniam angulus A duplus eſt anguli B, etiam latus BC oppoſitum angulo A, duplum eſſe deberet lateris AC oppoſiti angulo B; quod fieri non poteſt; nam, cùm duo latera AB, AC ſint invicem æqualia per hyp., haberemus BC = AC + AB; quod eſt abſurdum. Quamobrem *Anguli trianguli non ſunt inter ſe, uti latera iiſdem angulis oppoſita*.

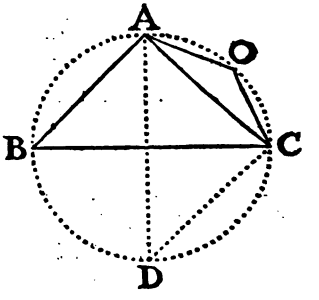
4. Hac ſpe dejecti, alias ſtatim vias rimati ſunt; atque hæc illos cogitatio ſubiit, an hæc conſtans proportio inveniri poſſet inter angulos, & chordas eorumdem angulorum; hoc eſt, *An anguli cujuſvis trianguli eſſe poſſint inter ſe, uti chordæ eorumdem angulorum*.



Triangulo iſoſceli ABC rectangulo in A, circumſcribatur circulus. Quoniam chorda anguli eſt ipſiſſima chorda arcus, qui angulum metitur, ac præterea menſura anguli

ad circumferentiam eſt ſemiſſis arcus a lateribus intercepti (n. 171. Geom. planæ); hinc ducta diametro AD, perſpicuum eſt rectam DC eſſe chordam anguli BAC; quia verò conſtat DC=AC, erit AC chorda arcus, qui metitur angulum A.

Similiter angulum B ad circumferentiam metitur AO ſemiſſis arcus AOC; ac proinde chorda anguli B eſt recta AO. Quare, ſi anguli trianguli cujuſvis eſſent inter ſe, utì eorum chordæ reſpondentes, hæc haberetur proportio: utì angulus A eſt ad angulum B; ita AC chorda anguli A, eſſet ad AO chordam anguli B. Atqui, per hyp., angulus A duplus eſt anguli B; ergo chorda AC dupla eſſet chordæ AO. Cùm autem ſit AO =OC; hinc recta AC æquaret lineam anguloſam AOC; quod repugnat definitioni rectæ lineæ; ac proinde *Anguli trianguli cujuſvis non ſunt inter ſe, utì eorum chordæ reſpondentes.*



5. Pronum itaque fuit dubitare deinceps, an, ſi non anguli, ſaltem latera trianguli comparari poſſent chordis horum angulorum; ac tandem Geometris affulſit theorema, ex quo natam, excultamque Trigonometriam gratulamur, nimirum:

Latera trianguli cujuſvis conſtanter eam inter ſe proportionem habent, quam chordæ duplorum angulorum iiſdem lateribus oppoſitorum.

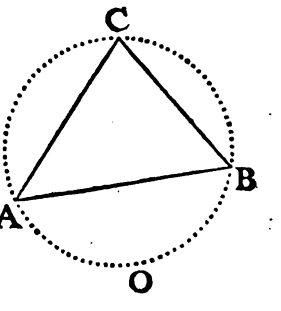
Circumſcribatur circulus triangulo ABC, ut in figura ſequenti. Evidens eſt latus quodlibet eſſe chordam anguli dupli illius, cui idem latus opponitur. Nam, puta, angulus C, cujus vertex eſt ad circumferentiam, eſt ſemiſſis anguli, qui haberet pro menſura arcum AOB, cujus latus AB eſt chorda.

6. Hæc

6. Hæc ſimplex obſervatio opinione majorem attulit fructum. Nam primis Geometris oborta ſtatim eſt hæc cogitatio, cui analyſim triangulorum debemus: nimirum, ſi determinaretur in numeris valor omnium chordarum angulorum, facilè hac via cognoſci poſſent latera, & anguli cujuſvis trianguli, in quo vel unum latus, & duo anguli darentur, vel duo latera, & unus angulus, vel denique tria latera.

Quod ut unico exemplo aſſequantur Tirones, antequam in hanc tractationem ingrediar, ponamus dari duos angulos A, B, & latus AB trianguli ABC: Dico ſimplici regula trium, ut vocant, facilè inveniri valorem reliquorum laterum AC, CB. Nam I. datis duobus angulis A, B, datur & tertius C; II. Fiat, *Ut chorda dupli anguli* C *ad chordam dupli anguli* B; *ita latus* BA *oppoſitum angulo* C, *ad latus* CA *oppoſitum angulo* B. Quare, ſi determinarentur in numeris chordæ omnium angulorum, utì a Geometris præſtitum eſt, & artificium mox trademus, tres primi termini hujus proportionis erunt cogniti; quartus itaque invenietur. Eadem methodo determinabitur latus CB.

Vides jam quanta facilitate aperiatur inde via, ut, quibuſdam datis, & anguli cognoſcantur, & latera triangulorum omnium, ſi modò in numeris confici poſſet tabula omnium hujuſcemodi chordarum. In hanc curam totis viribus incubuerunt antiqui perinde, & recentiores Geometræ, qui multò etiam fore commodius cenſuerunt, ſi valorem, non integrarum chordarum, ſed tantùm ſemiſſium ſupputarent in numeris; quod eòdem recidit; *Nam chordæ ſunt inter ſe, utì earum ſemiſſes.*



Ut

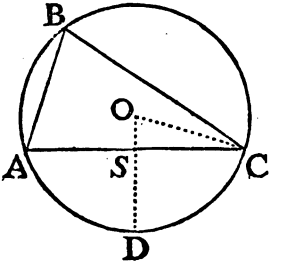
Ut autem Tirones rudem ſaltem, & inchoatam idæam afferant eorum, quæ pluribus erunt exponenda, breviſſimè rem ſic explico. Demonſtravimus nuper latera trianguli eſſe inter ſe, utì ſemiſſes chordarum duplorum angulorum, qui eiſdem lateribus opponuntur. Itaque a centro O in latus AC demittatur perpendicularis OSD; ducaturque radius OC.

I. Chorda AC eſt bifariam ſecta in puncto S;

II. Arcus ADC eſt pariter bifariam ſectus in puncto D;

III. Angulus COD æquatur angulo B ad circumferentiam. Quæ omnia conſtant ex Elementis.

Vocant autem Geometræ *Sinum anguli*, puta, COD, rectam perpendicularem CS demiſſam ab extremitate C arcus CD, qui eumdem angulum metitur, in radium OD, qui tranſit per extremitatem alteram D ejuſdem arcus. Quamobrem, cùm angulus COD ſit æqualis angulo B, erit perpendicularis CS pariter ſinus anguli B. Eſt autem CS ſemiſſis chordæ CA, dupli anguli B; Ergo *Sinus anguli nihil eſt aliud, quàm ſemiſſis chordæ dupli ejuſdem anguli*. Demonſtravimus autem latera trianguli eſſe inter ſe, utì ſemiſſes chordarum duplorum angulorum, eiſdem lateribus oppoſitorum; Ergo *Latera trianguli ſunt inter ſe, utì ſinus angulorum hiſce lateribus oppoſitorum*. Hujus theorematis inventio facem prætulit Tabulis ſinuum, quas Geometræ conſtruere aggreſſi ſunt.



Habes in primo limine hujus tractationis adumbratam Trigonometriæ formam, quæ Tirones, opinor, ad hujus facultatis ſtudium alacriùs, fidentiùſque ſuſcipiendum incitabit. Sed a definitionibus ordiamur.

DE-

DEFINITIONES.

7. ARs dimetiendi, ſeu reſolvendi triangula, dicitur *Trigonometria*. Porro triangulum omne, ut per ſe patet, ex tribus lateribus conſtat, & ex tribus angulis; ex quibus, ſi tria ſint nota, tria reliqua, quæ ſunt ignota, inveniuntur. Hæc inventio dicitur *Reſolutio*, ſeu *Analyſis* triangulorum. Scientia igitur ea, quæ ex datis trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera, laterumve rationes, aut mixtim aſſequitur, *Trigonometria* appellatur, quæ triangulorum dimenſionem græco vocabulo exprimit.

Triangulum duplex eſt, aliud *planum*, & aliud *ſphæricum*. Triangulum planum eſt, quod ex tribus rectis conſtat lineis, quæ ejus latera dicuntur. Triangulum ſphæricum eſt, quod in ſphæræ ſuperficie a tribus ejuſdem ſphæræ maximorum circulorum arcubus comprehenditur.

Hinc Trigonometria quoque duplex eſt, nempe plana, quæ circa triangula plana; & ſphærica, quæ circa triangula ſphærica verſatur.

Quare in quatuor partes hunc tractatum dividemus. Prima aget de conſtructione Tabularum Sinuum, Tangentium, & Secantium; Secunda de Triangulis planis; Tertia de Logarithmis; Quarta de Triangulis ſphæricis.

TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PARS PRIMA.

De Trigonometria plana, ſeu rectilinea, & de conſtructione Tabularum Sinuum, Tangentium, & Secantium.

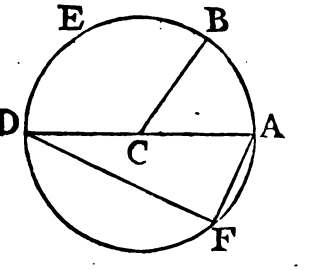
UTITUR quatuor linearum generibus Trigonometria, nempe Sinibus, Tangentibus, Secantibus, ac Sinibus verſis, quorum in analyſi triangulorum, in Geometria practica, in Aſtronomia, aliiſque uſus eſt maximus. Vocant autem plerique Recentiores has omnes lineas generatim *Functiones* arcuum circuli, vel angulorum eoſdem arcus habentium pro menſura.

DE-

DEFINITIONES.

Quid ſint Sinus, Tangentes, & Secantes; & quorſum collimet harum linearum inventio, & artificium.

8. ANguli plani rectilinei ACB, vel BCD *quantitas*, ſeu *menſura* eſt circuli arcus AB, vel BED ex anguli vertice C, tanquam centro, ad quodvis intervallum deſcripti, comprehenſus inter rectas AC, BC, vel BC, DC, angulum BCA, vel BCD conſtituentes.

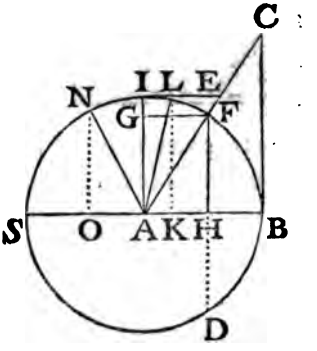


9. *Subtenſa*, ſeu *Chorda* alicujus arcus, eſt linea recta ducta ab uno ad alterum extremum ejuſdem arcus. Sic recta AF eſt chorda arcus AF, quem ipſa ſubtendit, peræquè ac alterius arcus ABDE.

Scholion.

QUando ſimpliciter dicitur chorda arcus, ſemper intelligitur chorda minoris arcus, ex duobus, quos illa ſubtendit. Diameter autem dicitur chorda maxima.

10. *Complementum* alicujus arcus, aut anguli, eſt id, quod eidem deeſt ad complendum quadrantem circuli, vel angulum rectum. Sic arcus IF dicitur complementum alterius arcus BF; & reciprocè arcus BF eſt complementum primi arcus IF.



11. *Sup-*

11. *Supplementum* dati arcus, aut anguli, eſt id, quod eidem deeſt ad complendum ſemicirculum, aut duos rectos. Sic hujus arcus BF eſt ſupplementum arcus SNF; & reciprocè.

12. *Sinus rectus* alicujus arcus, aut anguli, eſt recta perpendicularis, cadens ab uno extremorum dati arcus in circuli diametrum ab altero extremo ejuſdem arcus puncto ductam. Sic linea FH eſt ſinus rectus arcus BF, aut anguli BAF; LK eſt ſinus rectus arcus BL, aut anguli BAL.

Vel, *Sinus rectus* alicujus arcus eſt dimidium chordæ dupli arcus. Nam FH eſt ſemiſſis chordæ FD, dupli arcus FBD. *Sinus rectus* ſimpliciter vocatur *ſinus*, abſque nomine recti, & dicitur etiam *ſinus primus*.

13. Quò magis arcus BF accedet ad quadrantem circuli, vel, punctum F quò propius fiet puncto I, eò major erit ſinus FH; ita ut, ſi punctum L intervallo infinitè parvo diſtet a puncto I, angulus LAB conſiderari poterit tanquam rectus; punctum K coincidet cum puncto A, & ſinus LK cum radio IA. Hinc radius eſt ſinus anguli recti, eſtque omnium maximus; & hac de cauſa dicitur *ſinus totus*, vel *ſinus quadrantis*, quoniam refertur ad quadrantem, qui eſt menſura anguli recti.

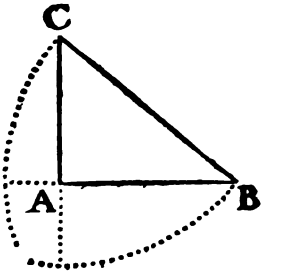
14. *Sinus complementi*, ſive *ſinus ſecundus* arcus FB, & anguli FAB, eſt FG ſinus illius arcus FI, qui quadrantem complet; adeoque & ſinus illius anguli FAI, qui cum priore FAB complet rectum IAB.

Corollarium I.

15. QUoniam recta GF = AH, hinc diſtantia centri circuli a ſinu recto aſſumi ſemper poterit pro ſinu complementi ad unum rectum.

Corollarium II.

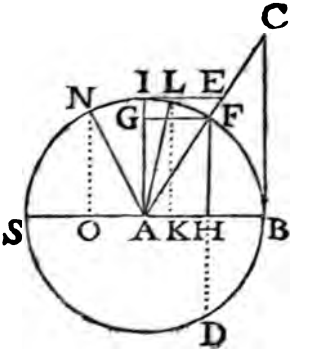
16. HAbes jam, quomodo hæ lineæ in circulo conſideratæ traducantur facilè ad trianguli rectanguli latera. Nam in omni triangulo rectangulo, *ſi conſideretur hypotenuſa tanquam radius, ſeu ſinus totus, quodvis duorum reliquorum laterum erit ſinus anguli oppoſiti*; hoc eſt, ſi hypotenuſa BC ſit radius circuli, aut ſinus totus, erit AC ſinus anguli B, & AB ſinus anguli C, complentis cum priore B unum rectum.



Corollarium III.

17. HInc in omni triangulo rectangulo *latera ſingula ſunt ſinus angulorum oppoſitorum.*

18. *Sinus verſus* dati arcus eſt radii pars inter extremum, & ſinum rectum ejuſdem intercepta. Sic BH eſt ſinus verſus arcus BF; & IG eſt ſinus verſus arcus IF.



Scho-

Scholion.

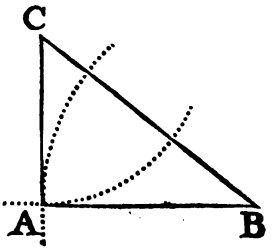
CUm Scriptores de ſinu aliquo loquuntur, ſemper intelligunt ſinum rectum: niſi illum vocent ſinum complementi, aut verſum.

19. *Tangens alicujus arcus, aut anguli*, eſt recta, quæ extremitatem arcus contingit, comprehenſa inter contactum, & concurſum cum linea, ex centro per alterum extremum ejuſdem arcus extra circulum producta. Sic (*Fig. n.* 18.) recta BC eſt tangens arcus BF; & recta IE eſt tangens arcus IF. Hujuſmodi autem tangens appellatur *prima*.

Secans alicujus arcus eſt linea ducta ex centro circuli per extremum arcus, & ad tangentem extra circulum terminata. Atque ita linea AC eſt ſecans arcus BF, & linea AE ſecans arcus IF; vocaturque hujuſmodi ſecans *prima*.

Corollarium.

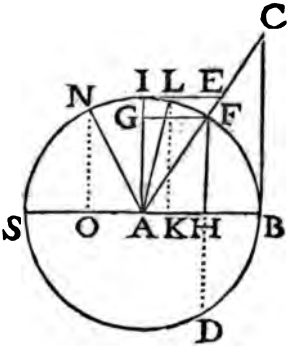
20. HInc in omni triangulo rectangulo, *ſi alterutrum duorum laterum, puta*, AB, *accipiatur tanquam radius, ſeu ſinus totus, latus alterum* AC *evadit tangens anguli* B *adjacentis primo lateri* AB; *& hypotenuſa* CB *evadit ſecans ejuſdem anguli* B. Sin autem latus AC accipiatur pro radio, ſeu ſinu toto, latus AB evadit tangens anguli C, & hypotenuſa CB ſecans ejuſdem anguli C.



Scholion.

21. QUoniam tangens, & ſecans *reciprocè altera alteram terminat, hinc palam conſtat angulum rectum, anguloſque, aut arcus majores gradibus* 90, *habere non poſſe neque tangentem, neque ſecantem. Ratio eſt, quia, ſi angulus rectus ſit, ſecans* AC *coincidit cum radio* AI, *ac proinde parallela evadit tangenti* BC, *neque uſpiam illi poteſt occurrere; multòque magis, ſi angulus ſit obtuſus; puta, radius* AN *nunquam occurret tangenti* BC, *etiamſi utraque in infinitum producatur; quin imò utraque in infinitum recedet. Verum quidem eſt, quòd productis radio* AN *versùs* A, & *tangente* BC *versùs* B, *hujuſmodi lineæ alicubi concurrent, ſed non versùs eam plagam, ad quam producere eaſdem oportet; nam Trigonometria non conſiderat lineas, quæ extra angulum invicem concurrunt. Hac de cauſa, anguli obtuſi, aut arcus majores gradibus* 90, *nullos ſibi ſpeciatim ſinus vindicant; quippe qui extra angulum caderent, quemadmodum ſinus* NO *reſpectu anguli obtuſi* BAN.

Cùm autem ſupplementa *horum angulorum, aut arcuum ſint ſemper minora gradibus* 90, *ſi quando in praxi occurrant anguli obtuſi, Trigonometria docet, quomodo inveniantur ſinus, tangentes, & ſecantes ſupplementorum, ut hac via cognoſcantur arcus, aut anguli obtuſi, quibus opus eſt in dimenſione triangulorum.*



22. *Quamobrem arcus* FNS *quadrante major eumdem dicitur habere ſinum* FH, *quem arcus minor* FB, *qui cum eo ſemi-*

ſemicirculum conſtituit. Et angulus recto major FAS eumdem habet ſinum, quem angulus acutus FAB, qui cum eo efficit duos rectos. Ratio eſt, quia ex Definit. ſecunda n. 12. ſinus arcus FB eſt FH dimidium chordæ FD. Cùm autem eadem ſubtenſa ſit chorda duorum arcuum FBD, FSD, qui ſimul circulum integrum conſtituunt; erit quoque ejuſdem chordæ ſemiſſis FH, ſinus ſemiſſium eorumdem arcuum FNS & FB, qui ſemicirculum componunt.

Corollarium.

23. SI quæratur valor anguli, cujus datur ſinus FH, poterit indifferenter exhiberi angulus acutus FAB, vel obtuſus FAS; niſi fortè præcognoſcatur *in qua ſpecie debeat eſſe angulus*, qui pertinet ad datum ſinum FH, nimirum, an obtuſus, vel acutus.

Scholion.

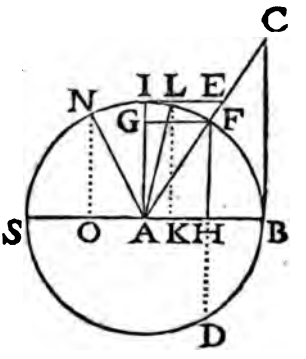
HArum autem linearum, *quas hactenus definivimus, quædam totæ intra circulum reperiuntur, ut ſinus; quædam totæ extra, ut tangentes; aliæ partim intra, & partim extra, ut ſecantes.*

24. Evaneſcente arcu BF, ubi punctum F coincidat cum B, ſinus rectus FH, & tangens BC evaneſcunt; ſed ſecans AC evadit æqualis radio. Creſcente arcu BF, creſcunt omnes tres, donec puncto F abeunte in I, ſinus FH fit æqualis radio; tangens verò BC, & ſecans AC evadunt infinitæ; cùm fiant parallelæ, adeoque punctum C in infinitum recedat.

Corollarium.

TAngens anguli recti, utì & ſecans vocantur infinitæ.

25. Sinus, tangens, ſecans, & ſinus verſus complementi alicujus arcus (qui *ſecundi* dici ſolent, atque etiam *coſinus*, *cotangens*, *coſecans*, & *coſinus verſus*) ſunt ſinus, tangens, ſecans &c. illius arcus, qui complementum eſt arcus dati. Ut arcus BF, vel anguli FAB ſinus complementi, vel ſinus ſecundus, aut coſinus eſt FG, tangens ſecunda, vel cotangens eſt IL, ſecans ſecunda, vel coſecans AE, & coſinus verſus IG.



Notiones autem ſingulas hactenus traditas hoc unico ichoniſmo complectar, ut Tironum memoria juvetur.

FH *Sinus rectus*
BC *Tangens*
AC *Secans*
BH *Sinus verſus*
FG *Coſinus*
IE *Cotangens*
AE *Coſecans*
IG *Coſinus verſus*

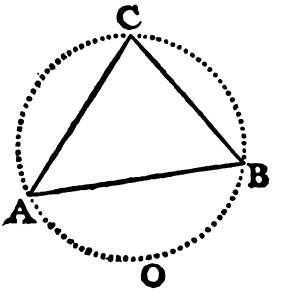
} arcus FB, aut anguli FAB.

26. At quorſum hæc, inquies, tam accurata ſinuum, tangentium &c. partitio? Quid enim habent commune ſinus, tangentes &c. cum lateribus trianguli etiam *acutanguli*, *aut obtuſanguli*, eorumque dimenſione? Habent utique; ac conſtanter ad arcus circuli referuntur. Nam *Semiſſis cujuſvis lateris trianguli* ABC, ut in Fig. ſequenti, *conſiderari poteſt tanquam ſinus anguli oppoſiti*; quod ſic oſtendo.

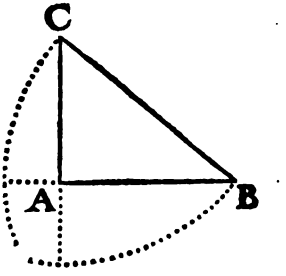
Huic triangulo circumſcribatur circulus. Angulus quilibet, puta, C, habebit verticem in ejus circumferentia; quamobrem (n. 171. Geom. planæ) habebit

pro

pro menſura ſemiſſem arcus AOB a ſuis lateribus intercepti; & conſequenter (*n.* 5.) hujus anguli ſinus erit ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcus AOB. Atqui (*n.* 5.) ſinus ſemiſſeos hujus arcus æquatur ſemiſſi ſubtenſæ AB, ſeu lateris oppoſiti angulo C; ergo angulus C habet pro ſinu ſemiſſem lateris AB, quod eidem angulo C opponitur. Eodem modo demonſtrabitur duos angulos A & B habere pro ſinu ſemiſſem laterum oppoſitorum.

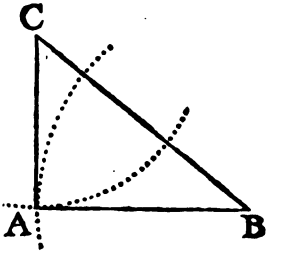


In omni pariter triangulo rectangulo vidimus n. 16. hypotenuſam BC vicem obire ſinus totius, ſeu radii circuli, centro B, intervallo BC, vel centro C, intervallo CB, deſcripti.



Similiter (*n.* 20.) in omni triangulo rectangulo ABC reſpectu acuti anguli B tangens eſt AC, ipſi oppoſitum latus; & alterum AB, ipſi adjacens, eſt ſinus totus, ſeu radius; hypotenuſa verò BC eſt ſecans, ſi centro B per A deſcribatur circulus.

Pari modo reſpectu alterius acuti C tangens eſt AB; ſinus totus, ſeu radius eſt AC; ſecans BC, ſi centro C per A deſcribatur circulus.



Hypotenuſa igitur utriuſque acuti anguli ſecans eſt; ac proinde, cùm hi anguli inæ-

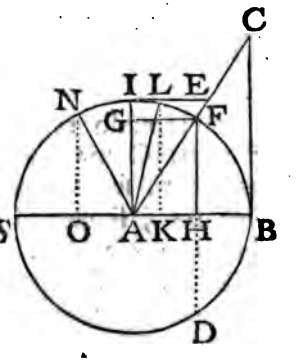
quales ſunt, diverſis numeris in Tabulis ſinuum hypotenuſa exprimitur; utì deinceps conſtabit.

Hæc autem analogia notanda in primis eſt, ut ſinus, tangentes, ſecantes ad uſum deducantur.

27. Sciſcitaberis rurſum, an cuilibet arcui, aut angulo *ſuus reſpondeat ſinus, cuique proprius, tangens &c.*? Ita planè; quod ſic declaro. Eſto circulus IBDS, cujus quadrans IB intelligatur, ut moris eſt, diviſus in gradus 90, & ſinguli gradus in minuta 60; ſic ut totus arcus IB diviſus ſit in partes æquales, ſeu minuta prima 5400.

Cogitentur deinde ex centro C ad ſingulos gradus, & minuta emitti rectæ; quarum unam deſigno AF. Conſtituentur hoc facto anguli 5400, quibus ſubtenduntur arcus totidem uno ſeſe invicem minuto excedentes. Ex his unum deſigno FAB. Itaque primus angulus erit minuti unius, ſecundus duorum minutorum, & ſic porro; ſexageſimus minutorum 60, hoc eſt, gradus unius, & ſic deinceps; poſtremus IAB graduum 90, adeoque rectus.

Tandem per minuta ſingula ducantur rectæ ad diametrum SB perpendiculares; quæ proinde etiam ipſæ numero erunt 5400, computando radium IA; quarum unam deſigno FH. Hæ ſinus erunt arcuum, & angulorum uno minuto ſeſe mutuò ſuperantium.



Similiter eſto idem circulus, cujus quadrans IB in eoſdem gradus, & minuta diviſus concipiatur. Hunc tangat recta indefinita BC; & ex centro A ducatur radius AB, qui cum tangente conſtituet angulum rectum. Co-

giten-

gitentur deinde per quadrantis gradus ſingulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF &c.: quo facto conſtituentur anguli CAB &c. ad 5400, ut ſupra, quibus ſubtenduntur arcus totidem BF &c.

Itaque tangens arcus BF, & eidem ſubtenti anguli FAB, erit recta BC, circulum tangens in uno extremo B ipſius arcus, inter punctum contactus, & productam AC per aliud extremum C, intercepta.

Secans ejuſdem arcus BF, & ejuſdem anguli FAB, erit radius AF a tangente terminatus; atque hac methodo arcui cuivis, & angulo reſpondebit tangens ſua, & ſecans.

28. Quæret denique, quorſum omne hoc artificium recidat, & quem in uſum? ac quid tandem rei ſit *invenire ſinus, tangentes, & ſecantes anguli cujuslibet, & arcus?*

Reſpondeo, Trigonometriæ ſcopum, & progreſſum eſſe planiſſimum. Nam circuli cujuſvis radius, ſive ſinus totalis intelligitur diviſus in eumdem numerum partium æqualium, nimirum, in 100000, aut in 10000000 partes æquales; quemadmodum circuli cujuſvis ſive magni, ſive parvi circumferentia dividi ſolet a Geometris in 360 partes æquales, quas gradus vocant.

Tum geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus ſinguli ſinus, tangentes, ſecantes contineant. *Invenire itaque ſinus, tangentes, ſecantes nihil eſt aliud, quàm eorum proportionem ad radium circuli, aut veram, aut a vera inſenſibiliter aberrantem, numeris exprimere.* Hæc autem inventio eò accuratior futura eſt, quò plures in partes radius circuli diviſus aſſumitur; utì deinceps oſtendam.

29. Quia verò cujuslibet circuli, ſive magni, ſive parvi radius ſemper intelligitur diviſus in eumdem numerum partium æqualium; hinc neceſſe eſt, ut partes

minoris radii minores ſint, quàm partes majoris radii; quod idem dici ſolet de gradibus circumferentiæ circulorum inæqualium. Hac de cauſa Tabulæ ſinuum, in quibus exponitur, quot ex illis radii partibus ſinguli ſinus contineant, non exhibent eorum ſinuum *magnitudinem abſolutam*, *ſed unicè reſpectivam*, hoc eſt, *eorum proportionem ad radium circuli*. Exempli cauſa: Quamvis, ope calculi trigonometrici mox explicandi, ſinus anguli graduum 30, inveniatur eſſe 50000 partium radii diviſi in 100000 partes æquales; decerni inde tamen non poteſt ejuſdem ſinus magnitudo abſoluta, puta, 3 pedum, 4 pedum &c. Nam hinc deducitur unicè proportio, quam dati anguli ſinus habet ad reliquos, & ad ſinum totum, ſeu radium; nimirum, ſinus 30 graduum, erit ſemiſſis ſinus anguli recti; nam primus cognoſcitur eſſe 50000 partium, & alter ponitur eſſe 100000 earumdem partium.

At, quamvis ex Tabulis magnitudo abſoluta ſinuum non cognoſcatur, hoc non impedit, quominus inveniri poſſit magnitudo abſoluta laterum trianguli, cujus videlicet unum latus, & duo anguli cognoſcantur. Nam ſinus inventi per Tabulas, utì mox oſtendam, erunt proportionales lateribus oppoſitis duorum angulorum; & conſequenter, ſi ſinus anguli oppoſiti lateri cognito ſit duplus alterius ſinus, etiam latus cognitum erit duplum lateris quæſiti; ac proinde, ſi latus cognitum ſit 50 pedum, latus quæſitum erit 25. Idem dicendum de tangentibus, & ſecantibus.

30. Gradus eſt trecenteſima ſexageſima pars totius circumferentiæ circuli. Minutum primum eſt ſexageſima pars gradus; minutum ſecundum ſexageſima pars minuti primi; & ita deinceps. Sic autem ſcribuntur. Ut $24^{\circ}\ 18^{\prime}\ 15^{\prime\prime}\ 40^{\prime\prime\prime}$ &c., ſunt gradus 24, minuta prima 18, ſecunda 15, tertia 40.

Scho-

Scholion.

UTilius fortaſſe eſſet, inquit Joannes Keil in Elem. Trig., circulum in decupla ratione ſecare; quæ diviſio forſitan aliquando obtinebit. Verùm, ſi circulus conſtet 360 *gradibus, ejus quadrans, menſura anguli recti, erit harum partium* 90; *ſi circulus in* 100 *partes ſecetur, quadrans erit* 25 *partium.*

31. Canon *Trigonometricus linearis* eſt Tabula, in qua ad ſingulos gradus, & minuta quadrantis circuli diſponuntur ſinus, tangentes, & ſecantes in eiſdem partibus, in quas circuli radius dividitur. Communiter autem radius ſumitur particularum 100000, aut 10000000. Canon hic dicitur linearis, quoniam lineas continet, nempe ſinus, tangentes &c., etſi numeris exprimantur: qua de cauſa differt a canone logarithmico, de quo infra agendum erit.

32. Datus, aut cognitus in Trigonometria dicitur arcus, cùm ſcitur, quot gradus, & minuta contineat; datus autem angulus, quando ejus arcus datur.

33. Datus inſuper dicitur ſinus, vel tangens &c., quando ſcitur, quot radii particulas contineat.

DE CANONE

Trigonometrico, ſive de Conſtructione Tabularum.

34. SI in plano aliquo quadrans tantæ magnitudinis conſtrueretur, ut ejus arcus commodè in 90 gradus, & ſinguli gradus in 60 minuta, itemque utraque ejus ſemidiameter, ſive ſinus totus in 10000000 partes æquales, puta, palmos, vel etiam in plures, paucioreſve dividi poſſet; facili negotio, inquit P. Clavius in ſua Trigonometria appoſitè ad captum Tironum, ſine ulla ſupputationis moleſtia, aut labore, omnium ſinuum magnitudines cognoſcerentur, ſi ex ſingulis arcus minutis rectæ ad utramque ſemidiametrum perpendiculares ducerentur. Quot enim particulas, ſeu palmos ex illis 10000000 continere invenirentur perpendiculares iſtæ, tot pariter particularum forent ſinus recti arcuum quadrantis; idemque dicito de reliquis ſinibus, tangentibus, & ſecantibus. Sed quoniam id & mechanicum eſſet, & ferme factu impoſſibile, ut quadrans tantæ magnitudinis reperiatur, qui commodè tot diviſiones recipiat, præſertim ob immanem poſtremarum tangentium, & ſecantium longitudinem; non aliis, quàm Geometriæ, & Arithmeticæ principiis repetenda erit hæc computatio.

35. Methodus itaque inveniendi ſinus omnium angulorum, & arcuum, qui eoſdem angulos metiuntur, vocatur *Conſtructio Tabularum*; in quibus omnes ſinus exprimuntur in partibus, in quas ſinus totus diviſus eſſe concipitur; ac ſinguli ſinus inventi ſuis reſpectivè angulis, aut arcubus proximo intervallo adjiciuntur; idemque fieri ſolet in canone tangentium, atque ſecantium.

36. Quoniam verò ſinus totus, hoc eſt, ſemidiameter cujuſvis circuli, intelligitur ab Aſtronomis diviſus

viſus in aliquot partes æquales, ut ratione harum partium omnes alios ſinus metiantur, proportioneſve omnium ſinuum ad ſinum totum, ſive ad ſemidiametrum in numeris exprimant; explicandum paucis erit, *in quot partes ſemidiametrum diſtribuerint antiqui, & recentiores Aſtronomi*. Neque enim omnes eodem modo eam ſunt partiti. Ptolomæus namque ſemidiametrum ſecat in 60 partes æquales, totam verò diametrum in 120; quamlibet deinde partem concipit diviſam eſſe in 60 minuta, & quodvis minutum in 60 minuta ſecunda; & ita deinceps. Arzahel vero Arabs conſtituit ſemidiametrum partium 150, ac proinde totam diametrum partium 300; quas quidem partes rurſus diſtribuit in minuta, ut Ptolomæus.

37. Sed utrovis modo ſemidiameter, ſive diameter dividatur, permoleſtum eſt alios omnes ſinus, ſive chordas in ejuſmodi partibus inveſtigare; cùm ſemper multiplicatio, diviſio, extractioque radicum per fractiones Aſtronomicas inſtituenda ſit; vel certè partes in minuta prima, ac ſecunda convertendæ, & contra, minuta in partes: quæ res laborioſa eſt non ſolùm parum exercitatis in Arithmetica, verùm etiam peritiſſimis.

38. Monteregius tangentium inventor, Antiquorum minutias abſtulit, ſumpſitque radium 6000000; at habito reſpectu ad diviſionem, putavit commodiorem 1000000. Rheticus, qui ſecantes etiam adjunxit, radium ſuppoſuit partium 10000000000; Briggius 100000000000000. Communis tamen uſus omnium id temporis obtinuit, ut in ſupputationibus, quæ ex ſinubus, aut chordis depromuntur, ſinus totus ſtatuatur partium 10000000, qui retinendus eſt. Ita enim opus non erit partes has in minuta prima, ac ſecunda diſtribuere, more Veterum; cùm una harum partium ſit multò minor, quàm unum minutum ſecundum radii in partes 60, ſecundùm Ptolomæum, diviſi, & conſequenter tutò negligi poſſit in calculo. Nam

unum

unum ſecundum minutum eſt $\frac{1}{216000}$ totius ſemidiametri diviſæ in 60 partes; cùm 60 partes contineant 216000 minuta ſecunda. At una particula ſemidiametri diviſæ in partes 10000000 eſt $\frac{1}{10000000}$ totius ſemidiametri. Conſtat autem minutiam hanc eſſe multò minorem illà. Quamobrem, etiamſi in ſinu aliquo negligatur interdum una ferè particula ex 10000000 particulis ſinus totius, multò tamen minor error committetur, quàm ſi negligatur unum ferè minutum ſecundum ex 216000 ſecundis, in quæ ſinus totus intelligitur eſſe diviſus. Quid præterea præſtari oporteat, ut Tabula ſinuum exquiſitè adhuc conſtruatur, poſito ſinu toto partium 100000, aut etiam pauciorum, exponam n. 70.

39. Multæ præterea obſervationes aliæ, quoad diviſionem radii, ſeu ſinus totius, erunt ſuis quæque locis adjiciendæ n. 69. 70. 71. 72. 73.; quas hoc loco congerere moleſtum, & grave Tironibus eſſet. Interim eoſdem monitos velim non id agi hìc a nobis, ut immani ſanè, & inutili prorſum labore Tabulæ rurſum computentur. Harum conſtructionem, & calculum antiquis Geometris, P. Clavio, P. De Chales, Ozanamo, & nuperrimè Rivard, Deparcieux, aliiſque debemus, qui poſteris laborem hunc præripuerunt. Id unicè agitur, ut qua ratione illæ computari poſſint, planiſſimè exponam. Hæc enim cognitio multùm conferet ad earumdem Tabularum uſum rite intelligendum. Ac quamvis multæ etiam a Recentioribus methodi ad contrahendum calculi laborem inventæ ſint; ex omnibus tamen illam ſeligam, quæ & captu facillima ſit, & ſcopum attingat.

Itaque I. Ut ſinus arcuum inveniantur, ſatis erit methodum tradere, qua cognoſci poſſint *chordæ diverſorum*

ſorum arcuum. Nam ſemiſſis chordæ alicujus arcus eſt ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcus. II. Tangentes, & ſecantes ope ſinuum invenientur.

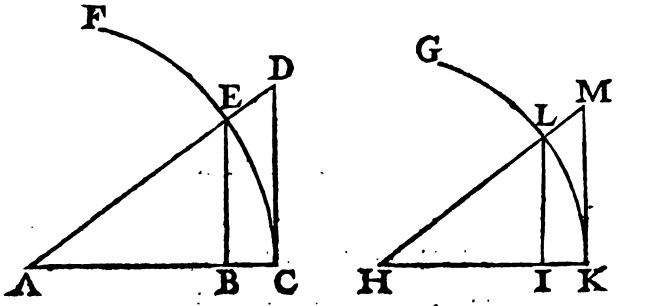
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

40. *IN circulis inæqualibus, ſinus, tangentes, & ſecantes arcuum ſimilium, eamdem habent rationem ad radios ſuorum circulorum.*

Demonſtratio. Si radii AC, HK duorum arcuum circuli ACEF, HKLG ſint inæquales, ſed arcus CE, KL ſint ſimiles, hoc eſt, eoſdem gradus contineant: Dico eamdem eſſe rationem ſinus BE ad radium AE, quam habet ſinus IL ad radium HL; & ſimiliter eamdem eſſe rationem tangentis CD ad radium AC, quam habet tangens KM ad radium HK &c.

Nam arcuum ſimilium anguli A & H ſunt æquales; & anguli ABE, & HIL ſunt recti, ac proinde æquales; ergo triangula ABE, HIL ſunt æquiangula; quare ſinus BE eſt ad radium AE, utì ſinus IL ad radium HL. Simili ratione tangens CD eſt ad radium AC, utì tangens KM eſt ad radium HK. Pariter ſecans AD eſt ad radium AC, utì ſecans HM eſt ad radium HK. Quod &c.



Co-

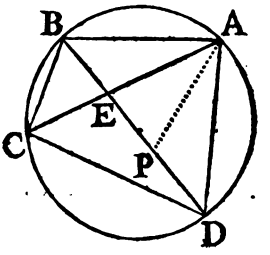
Corollarium.

41. HInc poſito cujuſvis circuli radio diviſo in quotvis partes æquales, ſi ope calculi trigonometrici inveniatur, quot hujuſmodi partes contineant ſinguli ſinus, tangentes, ſecantes omnium arcuum quadrantis circuli; numeri inventi pro ſinubus, tangentibus, ſecantibus hujus circuli, applicari poterunt ſinubus, tangentibus, & ſecantibus *alterius cujuſvis circuli ſive majoris, ſive minoris*, cujus radius ſimiliter ponitur diviſus in eumdem numerum partium æqualium.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

42. SI *quadrilaterum* ABCD *circulo ſit inſcriptum, factum duarum diagonalium* AC, BD *æquatur ſummæ factorum laterum oppoſitorum, nimirum,* AC×BD=AB×CD +AD×BC.



Demonſtratio repetenda eſt ab Elementis Geom. planæ n. 553.

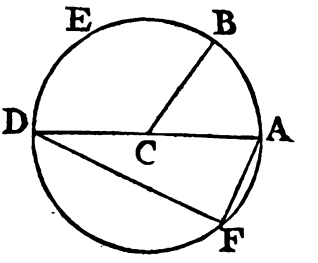
PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

43. COgnitâ *chordâ* AF *alicujus arcus, invenire chordam* DF *ſupplementi ad ſemicirculum.*

Reſolutio. Quoniam angulus in ſemicirculo eſt rectus,

ctus, erit $\overline{AF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AD}^2$; ſi ergo ponatur radius diviſus in 100000 partes æquales, valor diametri erit 200000; hinc, ſi a quadrato diametri AD ſubducatur quadratum chordæ AF, reſiduum erit quadratum chordæ DF; cujus radix quadrata dabit numerum partium, quas continet chorda quæſita DF. Quod &c.



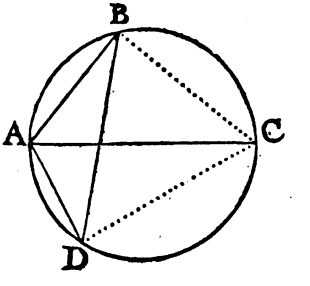
PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

44. *Cognitis chordis* AB, AD *duorum arcuum, invenire chordam* BD *ſummæ eorumdem arcuum.*

Reſolutio. Datis chordis AB, AD, dantur quoque per Probl. præced. chordæ ſupplementorum BC, DC ad ſuum ſemicirculum. Fiat $AB \times DC$, & $BC \times AD$: erit (*n.* 42.) $AB \times DC + BC \times AD = AC \times BD$ facto diagonalium. Horum autem factorum $AB \times DC + BC \times AD$ ſumma dividatur per notam diametrum AC; quotus ex diviſione ortus dabit chordam BD quæſitam.

Exemplum. Si chorda grad. 40 cognoſcatur eſſe 68404 in partibus diametri, & chorda grad. 36 ſit 61804, ope hujus Problematis facilè invenies chordam grad. 76 continere 123132 earumdem partium. Valor diametri ponitur 200000.



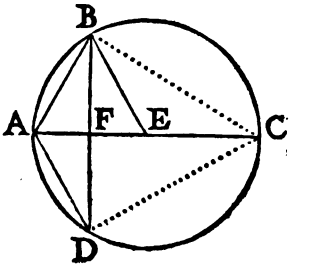
PRO-

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

45. *Cognitâ chordâ* AB, *invenire chordam* BD *arcus dupli.*

Reſolutio. Fiat AD = AB; quæraturque chorda BC ſupplementi, quæ æqualis erit chordæ DC alterius ſupplementi ad ſemicirculum. In quadrilatero autem ABCD factum duarum diagonalium AC × BD æquatur ſummæ factorum laterum oppoſitorum AB × DC + BC × AD (*n.* 42.): hæc ſumma dividatur per notam diametrum AC; quotiens, qui prodit, dabit chordam BD arcus dupli.

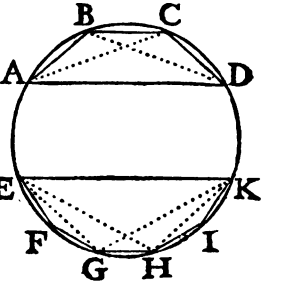


PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

46. *Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus tripli.*

Reſolutio. Inveniatur chorda arcus dupli per præced.; ac ſubinde quæratur (*n.* 44.) chorda ſummæ arcus ſimpli, & arcus dupli; hæc erit chorda arcus tripli.



PRO-

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

47. *Cognità chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus quintupli.*

Reſolutio. Inveniatur chorda arcus dupli (*n.* 45.), & chorda arcus tripli (*n.* 46.); ſummæ horum arcuum chorda (*n.* 44.), erit illa, quæ quæritur.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

48. *Cognità chordâ* BD *alicujus arcus* (Fig. n. 45.), *invenire chordam* BA, *ſemiſſeos ejuſdem arcus* BAD.

Reſolutio. A quadrato radii BE ſubducatur quadratum BF, ſemiſſeos chordæ cognitæ: reſiduum erit quadratum lineæ EF; cujus radix quadrata dabit rectam EF; quæ ſubducta a radio EA, nota fiet AF; cujus quadratum addatur quadrato BF: horum quadratorum ſumma erit quadratum chordæ AB; a quo, radice extracta, prodibit chorda AB, quæ quærebatur.

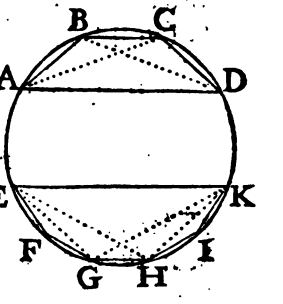
Exemplum. Si cognoſcatur chorda grad. 76, eſſe 123134, invenietur chorda grad. 38, eſſe 65114 in iiſdem partibus.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

49. *Cognità chordâ alicujus arcus, invenire chordam trientis ejuſdem arcus.*

Reſolutio. Eſto AD chorda cognita; & oporteat invenire chordam AB trientis arcus ABCD. Palam eſt, chordam incognitam AB, majorem eſſe oportere triente chordæ cognitæ AD. Itaque pro chorda AB aſſumatur numerus partium paulo major, quàm ſit tertia pars chordæ AD; & per hanc chordam ſuppoſitam AB, quæratur chorda arcus tripli (*n.* 39.). Si chorda, quæ ex hac ſuppoſitione invenitur, habeat eumdem numerum partium, qui deſignat datam chordam AD, numerus aſſumptus pro chorda AB, erit ille idem, qui quæritur.



At ſi, dum quæritur chorda arcus tripli ABCD, non inveniatur idem numerus partium chordæ datæ AD, inſtituenda erit regula trium, hoc pacto.

Si chorda inventa arcus tripli, conſequitur a partium numero, qui ponitur pro AB; *Chorda cognita* AD, *a quo numero derivabitur?*

Quartus terminus inventus, erit numerus partium, quas habere debet chorda AB.

Hæc regula trium ſupponit hanc proportionem: *Uti chorda inventa* AB *eſt ad chordam ſuppoſitam* AD; *ita vera chorda* AB *eſt ad veram chordam* AD.

Hæc autem proportio non eſt omnino exacta. Verùm citra ſenſibilem errorem hujuſmodi calculus procedet, ſi regula trium applicetur ſegmentis arcuum valde parvis, puta, arcui 7 grad., 30, & minoribus.

Cæterùm, experimentum ſemper capi poterit, an numerus inventus deſignet reipſa quæſitam chordam trientis arcus, cujus cognoſcitur chorda; ſi nempe per chordam inventam quæratur chorda arcus tripli; nam numerus inventus idem debet eſſe, quem habet chorda cognita.

Co-

Corollarium.

50. EAdem methodus adhibebitur, ut inveniatur chorda quintæ partis alicujus arcus; ſi nimirum numerus accipiatur paulo major quinta parte chordæ cognitæ, ac reliqua peragantur, ut ſupra.

Exemplum. Si chorda grad. 7, & min. 30, cognoſcatur eſſe 13080 partium diametri, invenietur chorda $2^{\circ}\,30'$, triens nimirum chordæ datæ, eſſe 4362, & chorda $1^{\circ}\,30'$, quintans nimirum chordæ datæ, eſſe 2618 in iiſdem partibus diametri. Radius ſemper ponitur eſſe 100000.

PROPOSITIO X.

PROBLEMA.

51. *OPe præcedentium Problematum invenire chordas arcuum quadrantis, ab arcu duorum minutorum uſque ad 90 gradus, continuo duorum minutorum augmento.*

Reſolutio. Ut accuratiùs in calculo procedatur, utì in proxima Appendice uberiùs oſtendam, aſſumatur radius circuli partium 10000000. Notum eſt ex Elementis, chordam 60 graduum æqualem eſſe radio circuli; quæ propterea nota erit in iiſdem partibus 10000000.

Per Probl. VIII. inveniatur chorda ſemiſſeos ejuſdem arcus, nimirum, chorda grad. 30, & hujus ſemiſſeos grad. 15, rurſumque ſemiſſeos, grad. $7.\,30'$.

Per Probl. IX. nota fiet chorda grad. $2.\,30'$, ſi quæratur chorda trientis arcus grad. $7.\,30'$.

Cognità chordà grad. $2.\,30'$, invenietur per Probl.

IX., ejuſque Coroll., chorda quintæ partis ejuſdem arcus, ideſt, chorda grad. o. 30′.

Cognitâ chordâ 30′, invenietur chorda trientis hujus arcus, hoc eſt, chorda grad. o. 10′.

Denique per idem Probl. IX., ejuſque Coroll., quæratur chorda quintæ partis hujus ultimi arcus; & habebitur chorda duorum minutorum.

Cognitâ chordâ 2′, invenietur chorda 4 minutorum, 8′, 16′, 32′ &c., quærendo nimirum ſucceſſivè chordam arcus dupli, per Probl. V.

Rurſum cognitâ chordâ 2′, invenietur chorda 6′, 18′, 54′ &c., ſi continuò quæratur chorda arcus tripli, per Probl. VI.

Denique, ſi quærantur chordæ ſummæ duorum arcuum, per Probl. IV., cognoſcetur chorda 14′ per ſummam arcuum 6′ & 8′; & chorda 22′ per ſummam arcuum 8′ & 14′; atque ita de reliquis, uſque ad chordam graduum 90.

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA.

52. *INvenire ſinus omnes uno tantùm minuto differentes, uſque ad gradus* 45.

Reſolutio. Inventis chordis BC, DE, OF, LK &c. omnium arcuum quadrantis circuli, qui ſeſe ordinatim duobus minutis ſuperent, facilè cognoſcentur ſinus omnes CP, EG &c., uno tantùm minuto differentes, uſque ad gradus 45. Ratio eſt, quia ſemiſſis ſubtenſæ alicujus arcus, eſt ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcus.

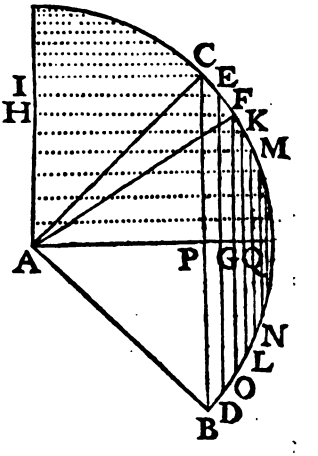
cus. Reliqui verò ſinus EI, FH &c., uſque ad 90 gradus, invenientur ope ſequentis Problematis.

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA.

53. *Dato ſinu* FG *cujuſvis arcus, complementi ſinum* FH, *ſive* GA *invenire.*

Reſolutio. Ducto radio AF, quadratum AF æquatur quadratis FG, AG; quare, ſi ex quadrato radii, ſeu ſinus totius, auferas quadratum ſinus dati FG, remanet quadratum AG, hoc eſt, quadratum FH; igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FH, ſinum complementi quæſitum.



Corollarium.

54. COgnitis ſinubus omnibus MQ, FG, CP &c., ab uno minuto uſque ad gradus 45, cognoſci inde poterunt reliqui omnes ſinus a grad. 45 uſque ad grad. 90.

Scholion.

QUamvis Aſtronomi, ac Geometræ omnia ſua Problemata, ac Theoremata per ſolos ſinus explicare poſſint, quia tamen multa facilius, ac brevius expediuntur, ſi unà cum ſinibus lineæ tangentes, ſecanteſque adbi-

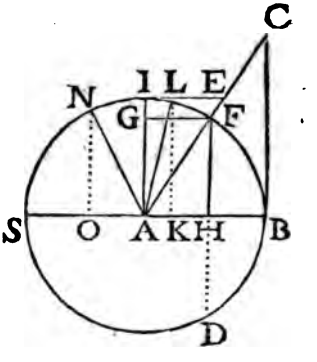
beantur, ut ex analyſi triangulorum erit manifeſtum; quas quidem lineas utili ſanè conſilio recentiores Geometræ excogitarunt, atque in tabulas redegerunt: viſum eſt has etiam lineas paucis exponere. Univerſa ſiquidem triangulorum reſolutio tribus biſce linearum generibus, nempe in ſinibus, tangentibus, & ſecantibus conſiſtere videtur.

PROPOSITIO XIII.

PROBLEMA.

55. *INventis ſinibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire tangentes omnes.*

Reſolutio. Facilè conſtat in omni caſu, triangula AHF, ABC æquiangula eſſe inter ſe; & conſequenter hanc proportionem conſtanter ſervari. AH, *ſinus complementi* : HF *ſinum rectum* :: AB, *radius* : BC *tangentem*.



Cognitis autem tribus primis terminis facilè cognoſcetur & quartus per regulam proportionum. Quare hujus tantùm Problematis ope tangentes invenientur omnium arcuum quadrantis circuli.

Scholion.

56. *UT autem brevitati calculi conſulatur, vitenturque errores, qui irrepere interdum ſolent in tangentes magnorum arcuum, quippe quæ augentur quàm maximè, interea dum ſinus recti eorumdem arcuum vix ad ſenſum augentur; limitandam cenſeo hanc regulam, & praxim uſque ad gradus* 45. *Tangentes reliquæ invenientur per Coroll. Theorematis ſequentis.*

PRO-

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA.

57. *Sinus totus eſt medius proportionalis inter tangentem arcus, & tangentem ſui complementi.*

Demonſtratio. Eſto BFI quadrans circuli. Dico tangentem BC eſſe ad radium AB=AI, utì radius AI eſt ad tangentem IE. Nam BC & AI ſunt inter ſe parallelæ, utì IE & AB; ac proinde triangula ABC, AIE ſunt æquiangula; itaque BC:AB, ſeu AI::AI:IE. Quod erat &c.

Corollarium.

58. Hinc quadratum radii æquatur rectangulo ſub tangente arcus, & tangente ſui complementi. Ergo, ſi dividatur quadratum radii per tangentem arcus, quotus, qui prodit, erit tangens ſui complementi. Ergo cognitis omnibus tangentibus ab uno minuto uſque ad gradus 45, cognoſci poterunt reliquæ omnes tangentes a grad. 45 uſque ad 90 grad.

PROPOSITIO XV.

PROBLEMA.

59. *Cognitis tangentibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire ſecantes.*

Reſolutio. Eſto BC tangens cognita: hujus quadratum addatur quadrato radii AB; ſumma dabit quadratum ſecantis AC, ejuſque quadrata radix ſecantem ipſam AC; atque ita porro de reliquis.

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA.

60. *TAngens arcus grad.* 45, *æquatur radio.*

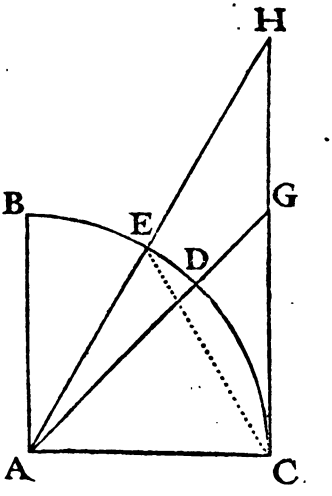
Demonſtratio. Eſto arcus CD grad. 45. Dico tangentem CG fore æqualem radio CA. Nam in triangulo rectangulo GCA, angulus GAC eſt grad. 45; & conſequenter totidem graduum eſt angulus CGA. Itaque duo latera CG, CA æqualibus angulis oppoſita, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVII.

THEOREMA.

61. *SEcans arcus grad.* 60, *æquatur diametro.*

Demonſtratio. Eſto arcus CDE grad. 60. Dico ſecantem AEH fore æqualem diametro. Nam I. ejus portio AE eſt ſemidiameter. II. Reliquum eſt, ut demonſtrem partem alteram EH pariter æqualem eſſe radio. Ducatur chorda CE; quæ radio æqualis eſt, cùm ſubtendat arcum grad. 60. Ergo triangulum CEA eſt æquilaterum; & conſequenter anguli ſinguli erunt grad. 60. Quare angulus ECH, complementum anguli ACE, erit grad. 30. Similiter angulus H erit grad. 30; quippe qui eſt complementum anguli EAC grad. 60. Triangulum itaque CEH eſt iſoſceles; & duo latera CE, EH ſunt æqualia; ac proinde EH æquatur radio, & ſecans AH æquatur diametro. Quod &c.



PRO-

PROPOSITIO XVIII.

PROBLEMA.

62. *CAnonem Trigonometricum ſinuum, tangentium, & ſecantium conſtruere.*

Reſolutio. Canon Trigonometricus, ſeu tabula communis ſex ordines, ſeu columnas continet, quæ in utraque pagina, dextera, & ſiniſtra ſimul exhibentur, ut unico obtutu cognoſcantur hinc gradus, inde eorum complementa uſque ad 90 gradus, ac ſingulis ſuus reſpondeat ſinus &c.

Prima columna ſiniſtræ paginæ continet arcus, nimirum, gradus, vel graduum minuta. Gradus notantur in fronte primæ columnæ, qui incipiunt a 0, & deſcendendo perpetuò creſcunt uſque ad gradus 45; ſingulis gradibus reſpondent in ſecunda columna ſinus, in tertia tangentes, in quarta ſecantes, in quinta, & ſexta logarithmi ſinuum, & tangentium; quorum originem, uſumque infra exponam.

Pagina dextera totidem habet columnas. Gradus notantur pariter in fronte primæ columnæ; ſed incipiunt a 90, & perpetuò decreſcunt. Sequuntur eodem ordine ſinus, tangentes, ſecantes &c.

Hæc in utraque pagina artificioſa notatio graduum creſcentium, & decreſcentium eò collimat, ut cuivis arcui, ſeu gradui exiſtenti in altera pagina, reſpondeat e regione in altera, ejus complementum, adeoque & coſinus, & cotangens &c. Nam 90 & 0 quadrantem complent, utì 89 & 1, 88 & 2 &c.; & quantum in altera pagina additur, tantundem in altera detrahitur.

Inveniuntur tantùm arcus uſque ad quadrantem; quia arcus quadrante majores eumdem habent ſinum, tangentem, & ſecantem, ac habeant ſua complementa ad ſemicirculum. Aptati ſunt autem ſinus, tangentes, ſecantes radio 10000000.

Scho-

Scholion I.

IN notatione graduum omiſimus minuta prima, quæ in tabulis prolixioribus Ozanami, P. De Chales, P. Clavii, & aliorum apponi ſolent; quas, ſi opus erit, conſulere poſſunt Tirones. Verùm ex ſolis gradibus inveniri etiam poterunt ſinus &c. pro minutis primis, & ſecundis, n. 66. & 67.

Scholion II.

NOtat Clavius rectiùs feciſſe Recentiores, qui ſinuum tabulam confecerunt, quàm Ptolomæum, & Veteres, qui chordas in tabulas redegerunt. Pro ſinibus enim ſatis eſt, ſi quadrans circuli per ſingula minuta extendatur; at pro chordis neceſſe eſt, totum ſemicirculum per minuta ſingula extendere; ita ut chordarum tabula ſit duplò major, quàm tabula ſinuum. Taceo, multò expeditiorem, facilioremque eſſe ſinuum uſum in rebus Aſtronomicis, & Geometricis, quàm chordarum; ita ut hac noſtra ætate tabulæ chordarum penitus obſoleverint.

De Uſu Tabularum.

OMnis tabularum uſus duobus Problematis continetur, quorum altero ex datis arcubus, ſeu gradibus quærantur ſinus, tangentes, & ſecantes; altero ex datis ſinibus &c. quærantur arcus, ſeu gradus.

PROPOSITIO XIX.

PROBLEMA.

63. *Dato quovis arcu, aut angulo, eruere e tabulis ſinum ipſi reſpondentem.*

Reſolutio. Si arcus datus non ſit quadrante major, & ſolos gradus contineat, invenietur in prima columna paginæ ſiniſtræ, vel dexteræ, prout fuerit major, vel minor 45°; ac e regione ipſius in eadem pagina reſpondebit in ſecunda columna ſinus, in tertia tangens &c.; atque in altera pagina complementum, coſinus, cotangens &c.

Si arcus datus quadrantem excedat, & ſolos gradus contineat, ſubtrahatur a 180°; & reſidui inveniatur ſinus, qui erit ſinus arcus dati. Nam ex dictis arcus quadrante major eumdem habet ſinum, quem arcus minor, qui cum eo ſemicirculum conſtituit.

Si præterea arcus datus contineat gradus, & minuta, etiamſi in tabula non ſint expreſſa, invenientur ſinus reſpondentes hoc artificio, quod ſequentibus Problematis docet P. Taquet in ſua Trigonometria.

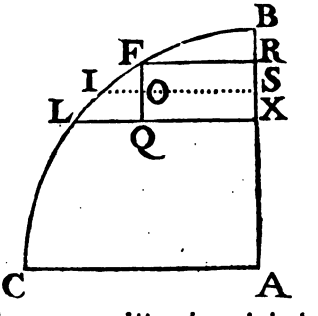
PRO-

PROPOSITIO XX.

LEMMA.

64. *DAtis ſinibus* LX, FR *binorum arcuum* LB, FB, *qui inter ſe parum differant, hoc eſt, quorum differentia non ſit major* 45 *minutis, invenire ſinum cujuſcunque intermedii arcus dati.*

Reſolutio. Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ ſinuum LX, IS ad ſinum FR; & quia arcus LF non eſt major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF ſenſibiliter a rectis lineis; ac proinde LFQ, IFO aſſumi poſſunt, ut rectilinea triangula. Quia ergo IO eſt parallela LQ, erit



Ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF *ad arcus medii, & minimi differentiam* IF;

Ita ſinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ *ad ſinus medii, & minimi differentiam* IO.

Quare, cùm hujus analogiæ tres primi termini ſint noti, etiam quartus IO innoteſcet; quem ſi addamus ſinui dato minori FR, notus erit medius quæſitus IS.

PROPOSITIO XXI.

PROBLEMA.

65. *DAto quovis arcu, qui contineat gradus, & minuta prima, eruere e tabulis ſinum &c. ipſi arcui reſpondentem.*

Reſolutio. Eſto arcus $35^{\circ}.20^{'}$, cujus quæritur ſinus. Inveniantur in tabulis ſinus arcus proximè majoris

36°, &

36°, & proximè minoris 35°; & horum ſinuum differentia capiatur 142089; arcuum autem differentia erit unus gradus, ſive 60. Fiat igitur

Ut duorum arcuum maximi & minimi differentia 60 *ad arcus medii, & minimi differentiam* $20'$;

Ita ſinuum inventorum maximi, & minimi differentia 142089 *ad ſinus medii, & minimi differentiam,*

hoc eſt, ad quartum numerum proportionalem; qui addatur ſinui reſpondenti arcui minori 35°, ſi quæritur ſinus, tangens &c. arcus $35^{\circ}.20'$, quippe quæ creſcunt creſcente arcu; vel dematur ab eodem, ſi quæritur coſinus, cotangens &c., quæ creſcente arcu contra decreſcunt; & habebuntur quæſiti ſinus, tangentes, ſecantes, coſinus &c.

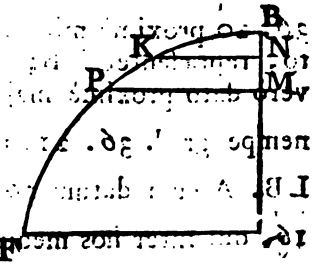
Corollarium.

HInc dato quovis arcu, qui contineat ſola minuta prima, erues e tabulis ſinum ipſi arcui reſpondentem, eadem prorſus methodo, qua in vulgaribus tabulis continentibus gradus, & minuta prima, eruuntur pro minutis ſecundis, tertiis &c.

PROPOSITIO XXII.

PROBLEMA.

66. INvenire *ſinum unius, vel plurium ſecundorum minutorum.*



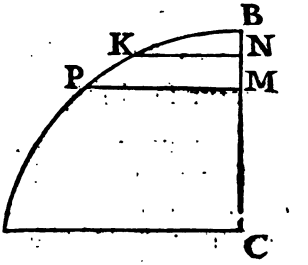
Reſolutio. Repræſentet PB arcum unius minuti, ſeu 60 ſecundorum; KB verò arcum 26 ſecundorum, uti libuerit. Sinus autem iſtorum arcuum ſint PM, KN.

Quoniam hi arcus insensibiliter differunt a lineis rectis, assumi poterunt triangula PBM, KBN tanquam rectilinea, & ex Elementis similia. Quare

Uti PB 1 *min.*, *seu* 60'', *ad* KB 26'';

Ita PM, *sinus* 1 *min.*, *ad* KN *sinum* 26''.

Quare per regulam trium reperietur sinus KN 26 secundorum; multiplicando videlicet secundum terminum 26 per tertium, nempe per 2909, sinum 1 min. & productum dividendo per primum, nempe 60''.



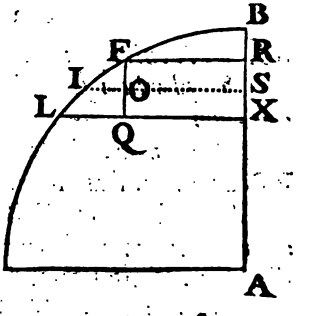
Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi, $49\frac{29}{60}$, posito sinu toto 10000000; licebitque eadem methodo reperire sinum unius tertii; & sic in infinitum.

PROPOSITIO XXIII.

PROBLEMA.

67. *INvenire sinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam secunda contineat.*

Resolutio. Inveniendus sit sinus graduum, puta, 36°. 20'. 16''. Arcum graduum 36°. 20' proximè minorem dato, repræsentet FB; arcum verò dato proximè majorem, nempe grad. 36°. 21', referat LB. Arcum datum 36°. 20'. 16'', qui inter hos medius est,



referat

referat IB; ſinus autem horum trium arcuum ſint LX, FR, IS; & ducatur perpendicularis FOQ.

Arcus igitur LF eſt 1^{I}, ſeu 60^{II}; arcus IF 16^{II}; LQ differentia ſinuum LX grad. $36^{I}.21$, & FR grad. $36^{I}.20$. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1^{I}, inſenſibiliter differt a recta linea, & multò adhuc magis arcus IF 16^{II}, erit ex Elem.

Ut LF 60^{II} *ad* IF 16^{II};

Ita LQ *differentia ſinuum, ad* IO *diff. ſinus &c.*

Quare, cùm tres primi termini ſint noti, etiam innoteſcet quartus, differentia IO; quæ addita FR ſinui grad. $36^{I}.20$, dabit ſinum quæſitum IS grad. $36^{I}.20.16^{II}$.

PROPOSITIO XXIV.

PROBLEMA.

68. *DAto ſinui, vel tangenti &c. correſpondentem arcum, aut angulum in eodem Canone invenire.*

Reſolutio. Sinum datum quære in tabulis; ſi eum reperies, arcum illi debitum habes adſcriptum.

Si non invenias, quære in iiſdem tabulis ſinum proximè majorem, & ſinum proximè minorem; ſubtrahaturque minor a majori, ut habeatur horum differentia; tum proximi minor ſinus etiam ſubtrahatur a propoſito ſinu, ut habeatur differentia eorum; & inſtituatur regula aurea, hoc pacto.

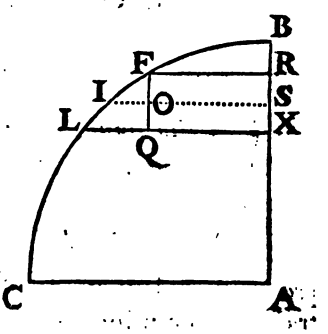
Si differentia ſinus proximè majoris a ſinu proximè minori dat minuta ſecunda 60; differentia propoſiti ſinus a proximè minori, quot minuta ſecunda dabit?

Exem-

Exemplum. Sit datus iſte ſinus 97737038, cui correſpondentem arcum, aut angulum oporteat invenire in Canone trigonometrico. Quoniam ſinus datus non invenitur in tabulis, quæratur in iiſdem proximè minor 97737038, cui reſpondent gradus $36^{\circ}.\ 25^{\prime}$, & proximè major, cui reſpondent gradus $36^{\circ}.\ 26^{\prime}$. Differentia inter hos ſinus eſt 1712; differentia propoſiti ſinus a proximè minori eſt 970; quare per regulam trium, ſi differentia 1712 dat minuta ſecunda 60, differentia 970 dabit minuta ſecunda 34; igitur arcus correſpondens eſt grad. 36, min. prim. 25, ſecund. 34, hoc eſt, $36^{\circ}.\ 25^{\prime}.\ 34^{\prime\prime}$.

Demonſtratio. Datum ſinum repræſentet recta IS, cui arcus debitus non inveniatur in tabulis adſcriptus. Quære eo ſinu proximè majorem, & minorem; quos referant LX, FR; ductaque perpendiculari FOQ, erit ex elementis.

Ut LQ *exceſſus ſinus* LX *proximè majoris dato, ſupra minorem* FR, *ad* IO *exceſſum ſinus dati* IS *ſupra minorem* FR; *ita arcus* LF 60 *ſecund., ad numerum ſecundorum, quæ debentur arcui* IF; qui additus gradibus, ac minutis arcus noti FB, dabit arcum debitum ſinui dato IS.



AP-

APPENDIX.

HActenus complexi fuimus totius theoriæ leges pro canonis trigonometrici conſtructione. Video tamen aliquid deſiderari poſſe, quod maximè profuturum puto. Nam & eos, qui ad praxim progredi volent, atque hunc in ſe laborem ſuſcipere, juvabunt ſanè Obſervationes, quas ſubjicio, ut accuratiùs procedant in calculo; & Trigonometriæ Studioſi, multò clariores, ac rebus ipſis accommodatas notiones inde referent.

OBSERVATIO I.

69. *QUid cauſæ fuerit, cur tutior, & commodior viſa fuerit diviſio radii in particulas* 10000000, *vel ſaltem* 100000, *quàm in pauciores.*

Ad conſtruendum canonem diximus n. 38., opus eſſe, ut determinetur numerus partium æqualium, in quas ſinus totus concipitur eſſe diviſus; quòve major aſſumitur harum particularum numerus, eò exactiores fore ſinus; quod hoc loco luculentiùs eſt explicandum, cauſæque errorum in medium afferendæ.

Ac primò, ex præjacta theoria compertum jam eſt, omnes ferè chordas, ac proinde etiam ſinus, & ſecantes, inventas fuiſſe per radicis extractionem; atque hinc prima errorum origo, qui ſolent in calculum irrepere. Nam numeri, ex quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm, non ſunt quadrati; ex quibus ſi radicem educas, ea ſemper a vera, quæ impoſſibilis eſt, differet exceſſu defectuve aliquo, minore, quàm ſit unitas; utì demonſtravimus in Commentariis Arithmet. Univerſ. Newtoni tom. 1. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in ſupputando moleſtiam negligitur

minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Exemplo ſint duo numeri non quadrati, qui multùm inter ſe differant, nimirum, 10150 & 22, a quibus radicem quadratam oporteat extrahere. Radix quadrata primi invenietur eſſe 100, & ſecundi, 4; ſed harum neutra exacta eſt; utriuſque a radice vera impoſſibili defectus minor eſt unitate. Conſtat autem defectum 1 multò minorem eſſe reſpectu 100, quam reſpectu 4; nam 1 eſt tantùm centeſima pars radicis 100; at verò 1 eſt quarta pars radicis 4. Unde fit, ut quò major eſt numerus non quadratus, ex quo radix elicienda eſt, eò minoris momenti ſit exceſſus ipſius, aut defectus a radice vera impoſſibili; ad quam hæc aberratio proportionem habeat inſenſibilem neceſſe eſt in maximis numeris, proindeque tutò, & abſque ſenſibili errore negligatur.

Hanc igitur ob cauſam tantus numerus partium ſinus totius aſſumi debet, puta, 10000000, vel ſaltem 100000.

Alterum caput errorum complurium ex eo ſequitur, quòd pleræque chordæ arcuum, & conſequenter complures ſinus, tangentes, & ſecantes, per regulam proportionis deducuntur ex aliis jam notis, & inventis per extractionem radicis. Hujuſmodi autem calculus contrahat neceſſe eſt vitia eorum ſinuum, e quibus derivatur: unde fit, ut error, qui in ſinu immediatè invento ſimplex erat, in ſecundo quaſi duplicetur, in tertio triplicetur, & ſic deinceps. Habet præterea hæc ſupputandi ratio errorem ſibi proprium, quòd, cùm regula proportionis exercetur, fractio ex diviſione reſidua negligatur.

Ex his fontibus ferè oriuntur ſinuum, tangentium, ſecantium defectus varii; qui, ſi radius maximo partium numero diviſus aſſumatur, quodammodo evaneſcunt, & ſimul juncti errorem vix ſenſibilem inducunt;

qua

qua enim proportione augetur numerus radii, eàdem creſcunt numeri ſinuum.

OBSERVATIO II.

70. *QUid præterea agendum, ut tabula ſinuum exquiſitiùs conſtruatur, poſito ſinu toto partium* 100000, *aut etiam pauciorum.*

Ut autem hujuſmodi errores, qui neceſſariò ſubeundi ſunt in calculo ſinuum, nequaquam officiant, docent inſuper conſtruendarum tabularum artifices, poſito numero partium radii, 100000, aut etiam pauciorum, addi debere quotcunque ciphras, puta, 2, aut 3, aut 5, ut fiat 100000.00, vel 100000.000, vel etiam 100000.00000; ad quem radium ita auctum componi debet integer canon ſinuum, qui deinde mutilandi ſunt tot figuris ad dexteram, quot ciphræ fuerant adjunctæ, ut canon compoſitus habeatur ad radium 100000.

Ratio eſt, quia errores ſinuum multis notis conſtantium non verſantur niſi in primis notis. Ita Regiomontanus, cùm ſinus cuperet ad partes radii 600000, aſſumpſit radium 600000.0000; & a ſinibus ad eum radium ſupputatis primas quatuor notas ſuſtulit. Similiter Rheticus, ut haberet ſinus ad radium 10000000000, aſſumpſit radium 10000000000.00000; & a ſinibus per hunc repertis præſcidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ reſiduæ omnes veræ exiſtant; ac proinde ſinus ita reperti, a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, ſive canone aſſumitur. Hujuſmodi ſunt ii omnes, qui in tabulis paſſim deſcripti ſunt.

OBSERVATIO III.

71. *EXponitur ratio, cur abjectis duabus primis figuris ex ſinu quocunque, reſpectu ſinus totius* 10000000, *relinquatur idem ſinus reſpectu ſinus totius* 100000, *licet prior ille non ſit exquiſitè inventus.*

Sinus totus, ſive diviſus ſit in plures partes, ſive in pauciores, conſtanter retinet determinatam proportionem ad eumdem ſinum rectum quemcunque; alioquin ſinus totus aliquando eſſet majoris quantitatis, & aliquando minoris, reſpectu ejuſdem ſinus; quod eſt abſurdum.

Quocirca, ſi ſinus cujuslibet arcus, puta, grad. 28, inventus ſit reſpectu ſinus totus in quotvis particulas diviſi, facilè per regulam proportionum inveniemus eumdem ſinum reſpectu ejuſdem ſinus totus in pauciores partes diſtributi, ſi ita dicamus. *Si ſinus totus partium* 10000000, *dat ſinum arcus grad.* 28, *partium* 4694716; *Idem ſinus totus partium* 100000, *quot ejuſmodi partium dabit ſinum ejuſdem arcus grad.* 28? Inveniemus enim ſinum partium $46947\frac{1600000}{10000000}$. Omiſſa autem hac fractione, quippe quæ minor eſt unitate, continebit idem ſinus partes dumtaxat 46947, quemadmodum in tabulis ſinuum ponitur, in quibus ſinus totus contineat partes 100000. Ubi vides, ſinum hunc relinqui, ſi ex illo duæ primæ figuræ ad dexteram abjiciantur.

Ratio hujus abjectionis eſt, quia, ut ſinus ille grad. 28, multiplicatus per ſinum totum 100000, ejuſque productum 4694716000000, dividatur per ſinum totum 10000000, ut regula proportionum præcipit, ſatis eſt, ſi ex numero producto rejiciantur ſeptem figuræ, quot nimirum ciphræ ſunt in diviſore; ut palam eſt ex Elementis

mentis Arith. Quare rejiciendæ ſunt quinque ciphræ, ac præterea duæ figuræ primæ, nempe hic numerus 1600000, qui cum diviſore hanc minutiam $\frac{1600000}{10000000}$ conſtituit, quæ unitate minor eſt, nempe $\frac{16}{100}$, ut patet; eademque ratio eſt in omnibus aliis ſinubus. Hinc fit, ſinum relictum poſt abjectionem duarum primarum figurarum ſatis exquiſitum eſſe reſpectu ſinus totius 100000; etiamſi ille, a quo duæ figuræ abjiciuntur, reſpectu ſinus totius 10000000 non eſſet exquiſitè inventus.

OBSERVATIO IV.

72. *SI ad ſinum quemcunque reſpectu ſinus totius* 100000 *adjiciantur duæ ciphræ ad dexteram, fit idem ſinus reſpectu ſinus totius* 10000000.

Eadem ratione, ſi cuilibet ſinui reſpectu ſinus totius partium 100000, invento apponantur duæ ciphræ ad dexteram, habebitur idem ſinus reſpectu ſinus totius partium 10000000. Nam, ſi dicamus: *Sinus totus partium* 100000, *dat ſinum arcus grad.* 28, *partium* 46947; *Sinus ergo totus partium* 10000000, *quot partium dabit eumdem ſinum arcus grad.* 28? Reperiemus per eamdem regulam proportionum, ſinum partium 4694700. Ubi vides ſinum hunc procreari, ſi illi duæ ciphræ ad dexteram adjiciantur. Ratio hujus adjectionis eſt ipſiſſima, quæ prius.

Quod autem ex ſinu 46947 non ſit inventus ſinus 4694716, ille idem, ex quo prius illum elicuimus, ſed ſolùm hic 4694700; cauſa eſt, quòd ſinus 46947 non eſt omnino exquiſitus reſpectu ſinus totius 100000; deberet namque eſſe 46947, & inſuper $\frac{16}{\text{K}}$:

ex dictis patet; ex quo præcisè invenietur ſinus ille 4694716; ſed ea minutia tutò negligi poteſt.

Id verò, quod de ſinubus totis partium 10000000, & 100000 diximus, intelligendum quoque eſt de aliis ſinubus totis quotcunque partium, ſive plurium, ſive pauciorum. Semper enim ex ſinubus reſpectu ſinus totius majoris inventis abjiciendæ ſunt tot figuræ, ut relinquatur ſinus reſpectu ſinus totius minoris, quot ciphris ſinus totus major ſinum totum minorem ſuperat.

OBSERVATIO V.

73. IN abjiciendis tamen a ſinu invento totidem ciphris, quot fuerant adjunctæ ſinui toto, hæc etiam obſervatio ante oculos habenda eſt, ut ad ſinum, quoad fieri poſſit, accuratiſſimè inveniendum accedamus. Nam, dum a ſinu, puta, 46947.16 auferuntur duæ figuræ 16, hæ numerator evadunt fractionis, cujus denominator eſt 1, cum tot ciphris, quot figuræ ſunt abſciſſæ, nempe $\frac{16}{100}$; quæ quidem negligi poteſt, quoniam numerator non excedit dimidium denominatoris, ideoque remanet ſinus 46947.

Finge jam ex ſinu invento 5745291.745 ad radium 10000000.000 auferendas eſſe tres figuras 745, ut revocetur ad radium 10000000: in hoc caſu fiet fractio $\frac{745}{1000}$, quæ tanquam integrum, aſſumenda eſt, quoniam numerator ſuperat dimidium denominatoris; hinc reſiduo addi debet unitas; atque adeo non remanebit 5745291, ſed 5745292, ſinus ad radium 10000000, qui prius erat 5745291745 ad radium 10000000.000.

Paucis: ſi duæ figuræ, aut tres &c., quæ abjiciuntur, plus valeant, quàm 50, aut 500 &c., reſiduo ſemper addenda eſt unitas.

OB-

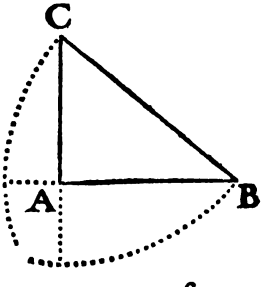
OBSERVATIO VI.

74. *QUid repræſentent numeri canonis trigonometrici, & quarum rerum ſint ſymbola.*

Hactenus Trigonometriæ Studioſis artem, modumque præſcripſimus conſtruendi canonis; reliquum jam eſt, ut quid ſibi velint hæ tabulæ tantâ induſtriâ concinnatæ, quidve hi numeri repræſentent, planiſſimè doceam; hinc enim totius Trigonometriæ genuina imago, amplitudo, atque præſtantia explicabitur.

Idæam canonis trigonometrici videor mihi breviſſimè ſic poſſe complecti. *Tabulæ ſinuum, tangentium, & ſecantium nihil deſignant aliud, quàm latera trianguli rectanguli, quorum ratio inter ſe determinatur, ſi aſſumatur unum ex his lateribus diviſum in particulas* 10000000. Accipe in tabula ſinuum, quam adjectam habes ad calcem hujus partis, pro libito duos quotvis ſinus, unum e regione alterius, hoc eſt, ſinum rectum, & ſinum ſui complementi, nimirum, in pagina ſiniſtra ſinum 27563.74, qui pertinet ad arcum grad. 16, ac præterea ſinum complementi in pagina dextera, 96126.17, qui pertinet ad arcum grad. 74.

Hi duo ſinus invicem comparati non exhibent hoſce numeros utcunque, & abſtractè; ſed pro varietate longitudinum, aut altitudinum metiendarum, puta, turrium, montium &c., deſignant numerum pollicum, aut pedum, aut hexapedarum, aut partium in alia quavis menſura, quas continent duo latera trianguli rectanguli optici, cujus hypotenuſa contineat 10000000 eorumdem pollicum, pedum &c. Scitum eſt enim in omni triangulo rectangulo B A C, latus B C recto angulo oppoſitum, vicem obire poſſe ſinus totius, ſeu radii; ac proinde reliqua latera eſſe



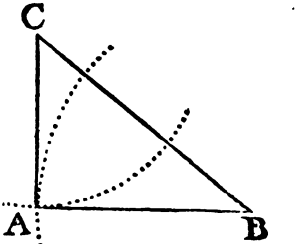
ſinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirum AB eſſe ſinum anguli C, & latus AC eſſe ſinum anguli B.

Quamobrem duæ columnæ ſinuum creſcentium, & decreſcentium, quæ in utraque pagina, dextera, & ſiniſtra conſpiciuntur, concipi debent compoſitæ ex numeris pollicum, pedum, hexapedarum &c., quas continent duo latera anguli recti in ſerie totidem triangulorum rectangulorum, quot gradus, aut etiam minuta ſunt in 45 gradibus; quæ triangula habent ſingula hypotenuſam 10000000 pollicum, pedum &c.

Hæc verò triangulorum ſeries ita concipi debet, ut primum triangulum rectangulum ex duobus angulis acutis ad baſim, minorem habeat, puta, unius gradus; ſecundum triangulum, ex duobus acutis minorem habeat duorum graduum; atque ita porrò cum incremento unius gradus in noſtra tabula, quam ad ſolos gradus contraximus, omiſſis minutis, uſque ad gradus 45.

Itaque duo ſinus 27563.74 & 96126.17, qui pertinent ad gradus 16 & 74, ſunt numeri partium, quas continent duo latera trianguli rectanguli, cujus hypotenuſa habet 10000000 earumdem partium; angulique ad baſim in hoc triangulo ſunt, alter grad. 16, & alter grad. 74.

Similiter tangens, & ſecans ejuſdem arcus deſignant numerum pollicum, pedum &c., quos continent latus unum, & hypotenuſa trianguli rectanguli, cujus alterum latus, inſtar ſinus totius, continet 10000000 eorumdem pollicum, pedum &c.; & cujus angulus adjacens huic ultimo lateri, æquatur numero graduum, & minutorum arcus, ad quem ſpectant tangens, & ſecans. Nam (*n.* 26.) in omni triangulo rectangulo BAC, reſpectu acuti anguli C tangens eſt AB latus ipſi oppoſitum; la-



tus

tus alterum CA eidem angulo C adjacens, eſt ſinus totus, ſeu radius; hypotenuſa verò CB, ſeu latus recto angulo oppoſitum, eſt ſecans.

Columnæ ergo tangentium, & ſecantium reſpondentium intelligi debent compoſitæ ex numeris pollicum, pedum, aut aliarum partium æqualium, quas continent unum latus, & hypotenuſa totidem triangulorum rectangulorum, quot habentur gradus, aut etiam minuta in gradibus 90, & quorum triangulorum latus alterum contineat ſemper 10000000 earumdem partium.

Hæc regula clariùs conſtabit in theoriæ uſu, & triangulis acutangulis, & obtuſangulis aptabitur.

G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
0	0	0	100000.00	——Infin.	——Infin.
1	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2419215
2	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838
3	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958
4	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437
5	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518
6	10452.85	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202
7	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438
8	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025
9	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125
10	17364.82	17632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188
11	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523
12	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745
13	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641
14	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711
15	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525
16	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964
17	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390
18	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760
19	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719
20	34202.02	36397.02	106417.78	9.5340517	9.5610659
21	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774
22	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096
23	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519
24	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831
25	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725
26	43837.12	48773.26	111260.19	9.6418420	9.6881818
27	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659
28	46947.16	53170.94	113257.01	9.6716093	9.7256744
29	48480.96	55430.90	114335.41	9.6855712	9.7437520
30	50000.00	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394

G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
90	100000.00	Infin.	Infin.	10.0000000	Infin.
89	99984.77	5728996.16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
88	99939.08	2863625.33	2865370.83	9.9997354	11.4569162
87	99862.95	1908113.67	1910732.26	9.9994044	11.2806042
86	99756.40	1430066.63	1433558.70	9.9989408	11.1553563
85	99619.47	1143005.23	1147371.32	9.9983442	11.0580482
84	99452.18	951436.45	956677.22	9.9976143	10.9783798
83	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562
82	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975
81	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875
80	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812
79	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477
78	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255
77	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359
76	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289
75	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475
74	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036
73	95630.48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610
72	95105.65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4882240
71	94551.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281
70	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341
69	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226
68	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671659	10.3935904
67	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481
66	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169
65	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275
64	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182
63	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341
62	88294.76	188072.65	213005.45	9.9459349	10.2743256
61	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418193	10.2562480
60	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606

G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
31	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737
32	52991.93	62486.94	117917.84	9.7242097	9.7957892
33	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174
34	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874
35	57357.64	70020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268
36	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610
37	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144
38	61566.15	78128.56	126901.82	9.7893420	9.8928098
39	62932.04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692
40	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135
41	65605.90	86928.68	131501.30	9.8169429	9.9391631
42	66913.06	90040.41	134563.27	9.8255109	9.9544374
43	68199.84	93251.51	136732.75	9.8337833	9.9696559
44	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417713	9.9848372
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
59	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263
58	84804.81	160033.45	188007.99	9.9284205	10.2042138
57	83867.06	153986.50	18360-.84	9.9235914	10.18-4826
56	82903.76	148256.10	1-8829.16	9.9185-42	10.1710126
55	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.154-32
54	80901.70	137638.19	170130.16	9.90-95-6	10.138-390
53	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228856
52	78801.08	127994.16	162426.92	9.8965321	10.10-1902
51	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905226	10.0916308
50	76604.44	119175.36	1555-2.38	9.8842540	10.0-6-865
49	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0602369
48	74314.48	111061.25	149447.65	9.8-10-35	10.0455626
47	73135.37	107236.87	146627.92	9.8641-5	10.0303441
46	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
PARS SECUNDA.

TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
PARS SECUNDA.

TRIGONOMETRIÆ THEORICO-PRACTICÆ

PARS SECUNDA.

De Triangulis planis.

QUANTUS ſinuum futurus in Trigonometria ſit uſus, facilè jam nunc conſtabit ex hac theoria; in qua delectabit, opinor, Studioſos, ſi quæ abſtractè in tabulis docentur, ea viderint triangulis cujuſcunque generis accommodari in omnem Geometriæ practicæ uſum.

Analyſis Trianguli rectilinei.

PROPOSITIO I.

THEOREMA

75. *IN omni triangulo rectangulo alterutrius duorum angulorum tenuſa eſt ad latus eidem angulo*

ſt ad ſi
uti l
lem

Demonſtratio conſtat ex n. 16. & 26. Nam, ſi accipiatur hypotenuſa BC pro radio, latus AC fiet ſinus anguli B; ac propterea ratio, quam habet
Recta BC, *conſiderata inſtar radii*,
ad AC, *conſideratam inſtar ſinus anguli* B,
eſt prorſus eadem, ac ſit ratio, quam habet
eadem BC, *tanquam hypotenuſa*,
ad AC, *tanquam latus*, *in eodem triangulo*.

Nam lineæ prorſus eædem manent in utraque conſideratione. Hujus analogiæ uſus erit frequentiſſimus in praxi trigonometrica.

Corollarium I.

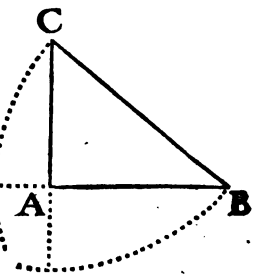
76. HInc permutando, & invertendo, eliciuntur ſequentes analogiæ, quæ obſervandæ ſunt in eo caſu, in quo hypotenuſa in quæſtionem cadit.

I. *Uti hypotenuſa*
ad alterutrum latus;
Ita ſinus totus
ad ſinum anguli huic lateri oppoſiti.

II. *Uti ſinus alterutrius duorum angulorum acutorum*
ad ſinum totum;
Ita latus huic angulo acuto oppoſitum,
ad hypotenuſam.

Corollarium II.

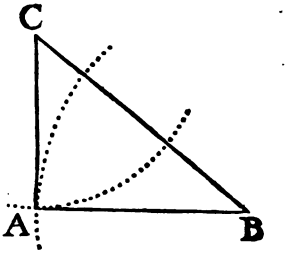
77. HInc patet, quòd cognitis angulis in triangulo rectangulo, etiam laterum proportio cognoſcitur. Nam, poſitâ hypotenusâ BC pro radio 100000, & angulo C grad. 50, & angulo B grad. 40, quærantur in canone reſpectivi ſinus 76604, 64278. Itaque laterum proportio BC, AB, AC, eadem erit, quæ numerorum 100000, 76604, 64278.



PROPOSITIO II.

THEOREMA.

78. *IN omni triangulo rectangulo ſinus totus eſt ad tangentem unius, aut alterius duorum angulorum acutorum, uti latus adjacens huic angulo, eſt ad latus oppoſitum eidem angulo.*



Demonſtratio patet ex n. 16. & 26. Nam, ſi latus AB aſſumatur tanquam radius, latus AC evadit tangens anguli B.

Similiter, ſi latus AC conſideretur tanquam radius, latus AB evadit tangens anguli C; ac proinde ratio, quam habet

Recta AB, *conſiderata inſtar radii*,
ad AC, *conſideratam inſtar tangentis*,
eſt prorſus eadem, ac ſit ratio, quam habet
eadem AB, *tanquam latus*,
ad AC, *tanquam latus alterum*.

Nam lineæ manent prorſus eædem in utraque ſuppoſitione.

Corollarium.

79. HInc, quoties hypotenuſa in quæſtionem non cadit, alterutra ex duabus analogiis haberi ſemper poterit.

I. *Uti ſinus totus, ſeu radius,*
ad tangentem unius angulorum acutorum;
Ita latus huic angulo adjacens,
ad latus eidem angulo oppoſitum.

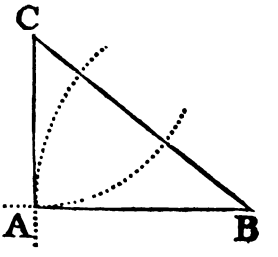
II. *Uti latus unum*
ad alterum;
Ita radius, ſeu ſinus totus,
ad tangentem anguli adjacentis primo lateri.

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

80. *IN omni triangulo rectangulo radius eſt ad ſecantem alterutrius anguli acuti, utì latus adjacens huic angulo, eſt ad hypotenuſam.*

Demonſtratio. Ratio eſt pariter eadem, quæ duarum præcedentium Propoſitionum. Nam, ſi duorum laterum unum AB aſſumatur pro radio, hypotenuſa BC evadit ſecans anguli B. Et ſimiliter, ſi latus alterum AC accipiatur pro radio, eadem hypotenuſa BC evadit ſecans anguli C. Quare ratio, quam habet



AB, *prout eſt ſinus totus, ſeu radius,*
ad BC, *prout eſt ſecans,*
eſt illa ipſa, quam habet
eadem AB, *prout eſt latus,*
ad BC, *prout eſt hypotenuſa.*

Corollarium I.

81. IN eo caſu, in quo hypotenuſa in quæſtionem cadit, tres analogiæ locum habent.

I. *Utì radius ad ſecantem alterutrius anguli acuti;*
Ita latus adjacens huic angulo, ad hypotenuſam.

II. *Utì alterutrum ex duobus lateribus ad hypotenuſam;*
Ita radius ad ſecantem anguli adjacentis primo lateri.

III. *Utì ſecans alterutrius anguli acuti ad radium;*
Ita hypotenuſa ad latus adjacens huic angulo.

Co-

Corollarium II.

82. ITaque eadem hypotenuſa BC, ut in Figura præcedenti, ſecans eſt utriuſvis angulorum B & C. Eſt ſecans anguli B, quando radius ponitur BA; eſt ſecans anguli C, quando radius fit CA.

Corollarium III.

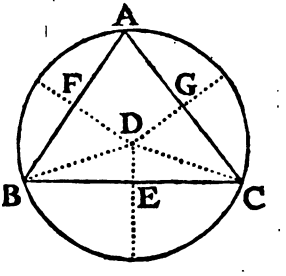
83. COlligitur modus alter inveniendi laterum proportionem ex angulis cognitis. Sint, ut prius, anguli C gradus 50, & anguli B 40: ponatur BA radius 100000; AC tangens anguli B, erit 83909; & ejus ſecans BC 130540; ut patet ex canone. Vel, poſito radio CA, erit BA tangens anguli C, 119175, & ejus ſecans CB 155572. Quare trianguli ABC, ſive ſit parvum, ſive ſit maximum, latera erunt inter ſe, ut numeri prædicti.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

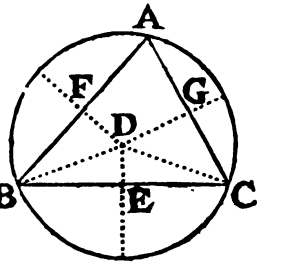
84. *IN quolibet triangulo rectilineo* ABC *latera eamdem inter ſe rationem habent, quam ſinus angulorum ipſis oppoſitorum.*

Demonſtratio univerſalis eſt, & triangulorum genus omne complectitur.

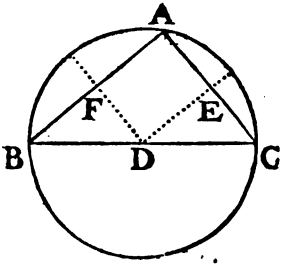


Itaque I. Triangulo acutangulo ABC circumſcribatur circulus; & ex centro D, radii ducantur DF, DE, DG, ſecantes arcus, & arcuum ſubtenſas bifariam, atque adeo ad rectos angulos. Dico latera BC, CA, AB eſſe, ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum A, B, C.

Nam ſemiſſes laterum ſunt ſinus angulorum ad peripheriam; eſt quippe angulus BDC ad centrum, duplus anguli A ad peripheriam. Ergo ſemiſſis anguli ad centrum, nimirum, angulus BDE, æquatur angulo A. Atqui anguli BDE ſinus eſt recta BE, per definit.; ergo eadem recta BE, ſemiſſis lateris BC, eſt ſinus anguli A. Eadem ratione erit CG ſinus anguli B, & AF ſinus anguli C.

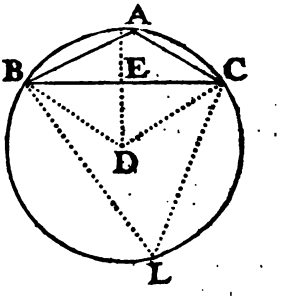


II. In triangulo rectangulo eſt $BD = \frac{1}{2}BC =$ radio; ſed radius eſt ſinus anguli recti; ergo ſemiſſis lateris BC eſt ſinus anguli A. Quod attinet ad reliquos angulos B & C, demonſtrabis, ut ante, CE eſſe ſinum anguli B, & BF eſſe ſinum anguli C.



III. In triangulo obtuſangulo BAC, ductis BL, CL, erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (*n.* 188. *Geom. planæ*); ac proinde idem erit utriuſque anguli ſinus ex def. n. 22. Eſt autem BE ſinus anguli BDE = angulo L; quare erit & BE ſinus anguli A.

Sunt itaque in omni triangulo ſemiſſes laterum ſinus angulorum oppoſitorum. Perſpicuum eſt autem latera eſſe inter ſe, ut ipſorum ſemiſſes. Quod erat &c.



Co-

Corollarium I.

85. ITaque, ut facilè proportiones laterum habeantur, ſatis eſt, ſi lateribus ſinus angulorum oppoſitorum adſcribantur.

I. In triangulo ABC (*Fig.* 1. *pag. præced.*) ponatur angulus C grad. 60, & B grad. 50, & A grad. 70. Horum ſinus ex tabulis reperientur eſſe 86602, 76604, 93969. Eſt ergo proportio lateris AB ad AC, eadem, quæ 86602 ad 76604; & AB ad BC, eadem, quæ 86602 ad 93969.

II. In triangulo altero ABC ponatur angulus A rectus, ac proinde grad. 90, & angulus C grad. 50, & B grad. 40. Horum ſinus ſunt 100000, 76604, 64278, qui laterum angulis oppoſitorum proportiones exprimunt.

III. In triangulo denique tertio ſtatuatur angulus A obtuſus grad. 124, & angulus C grad. 30, & B grad. 26. Horum ſinus ſunt (ſi pro ſinu anguli obtuſi accipiatur ſinus complementi ipſius uſque ad grad. 180, nempe ſinus grad. 56.) 82903, 50000, 43837. Quare erit AB ad CB, ut 50000 ad 82903, & AC ad AB, ut 43837 ad 50000 &c.

Corollarium II.

86. HInc datis angulis invenire utique licet proportiones laterum, at non ipſa latera, hoc eſt, magnitudinem *abſolutam* eorumdem, niſi ipſorum unum prius innoteſcat.

Scholion.

QUamvis in triangulis univerſis rectilineis ſinus angulorum ſint inter ſe, uti latera oppoſita; non inde tamen conſequitur eoſdem angulos eſſe inter ſe, uti eadem

latera oppoſita. Ratio eſt, quia chordæ non ſunt proportionales arcubus, qui eas ſubtendunt; & conſequenter ſinus, qui ſunt ſemiſſes chordarum, non ſunt proportionales eorum arcubus, aut angulis; utì docuimus n. 4. & 5.

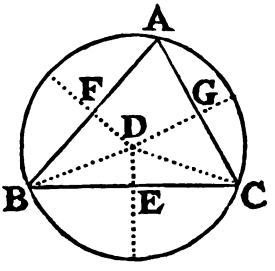
Corollarium III.

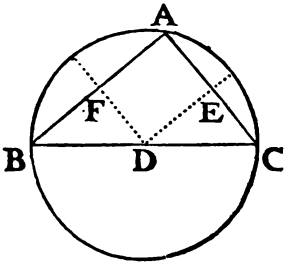
87. HInc in omni triangulo acutangulo, & rectangulo duæ ſemper habebuntur ſequentes analogiæ.

I. *Utì ſinus anguli* B
ad ſinum anguli A;
Ita latus AC, *oppoſitum primo angulo* B,
ad latus BC, *oppoſitum ſecundo angulo* A.

II. *Utì latus* AC
ad latus BC;
Ita ſinus anguli B, *oppoſiti primo lateri* AC,
ad ſinum anguli A, *oppoſiti ſecundo lateri* BC.

In triangulo autem obtuſangulo ſubſtituendus erit ſinus ſupplementi anguli obtuſi; utì jam oſtenſum eſt, & ſpeciatim etiam demonſtrabitur ſequenti Theoremate.





PRO-

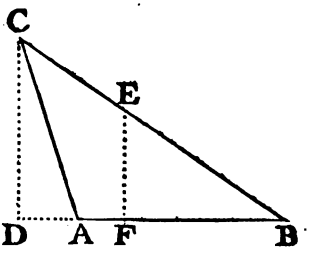
PROPOSITIO V.

THEOREMA.

88. *IN omni triangulo obtuſangulo, ſinus unius, aut alterius ex duobus angulis acutis, eſt ad ſinum ſupplementi anguli obtuſi, utì latus oppoſitum angulo acuto, eſt ad latus oppoſitum angulo obtuſo.*

Demonſtratio. Eſto triangulum ABC, cujus angulus A ſit obtuſus. Dico ſinum anguli acuti B eſſe ad ſinum anguli CAD, ſupplementi ad angulum obtuſum A, utì latus AC, oppoſitum angulo acuto B, eſt ad latus BC, oppoſitum angulo obtuſo A.

Fiat BE = AC; ac demittantur EF, CD perpendiculares ſuper BA productà versùs D. Itaque CD eſt ſinus anguli CAD, & EF ſinus anguli B. Triangula verò BEF, BCD ſunt æquiangula; ac proinde EF: CD::BE:BC; quare, ſi loco tertii termini BE, ſubſtituatur æqualis AC, prodibit hæc analogia:



Utì EF, *ſinus anguli* B,
ad CD, *ſinum ſupplementi anguli obtuſi* BAC;
Ita AC, *latus oppoſitum angulo acuto* B,
ad BC, *latus oppoſitum angulo obtuſo* BAC.
Quod erat &c.

Corollarium.

EX hac Propoſitione deducuntur eædem analogiæ, quæ in præcedenti, ſi loco ſinus anguli obtuſi A, ſubſtituatur ſinus ſui ſupplementi DAC.

PRO-

PROPOSITIO VI.

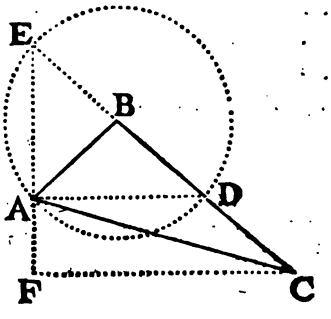
THEOREMA.

89. *IN quolibet triangulo* ABC, *ut ſumma duorum quorumvis laterum* BA, BC *ad eorumdem differentiam, ſic tangens ſemiſummæ angulorum* A & C *iiſdem lateribus oppoſitorum, eſt ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem.*

Demonſtratio. Centro B, intervallo minoris lateris BA, deſcribatur circulus EAD; ducaturque recta DA, & huic parallela CF; productàque CB, donec occurrat circulo in E, jungatur EA, protracta in F. Recta EF erit perpendicularis duabus lineis AD, FC. Nam angulus EAD ad ſemicirculum rectus eſt.

His præjactis, CE erit ſumma duorum laterum BA, BC; & eorum differentia erit DC. Rurſum angulus ABE, cùm ſit externus reſpectu trianguli ABC, erit ſumma duorum angulorum BAC, BCA, duobus lateribus BA, BC, quæ in quæſtionem cadunt, oppoſitorum; & angulus FCE = ADE, erit ſemiſſis eorundem ſummæ ABE. Nam angulus ADE eſt ad circumferentiam, & ſumma ABE ad centrum (*n.* 177. *Geom. planæ.*)

Angulus ACF erit ſemiſſis differentiæ eorundem angulorum BAC, BCA. Nam angulus BDA, aut ipſi æqualis BAD, major eſt angulo BCA, exceſſu anguli DAC; & angulus BAC major eſt angulo BAD, exceſſu eodem anguli DAC. Ergo angulus BAC major eſt angulo BCA, duplici exceſſu ejuſdem anguli DAC;



ergo

ergo angulus DAC, aut ipſi æqualis ACF, eſt ſemiſſis differentiæ duorum angulorum BAC, BCA.

Quia verò angulus F eſt rectus, ſi accipiatur FC pro radio, FE erit tangens anguli FCE, & FA tangens anguli FCA. Eſt præterea recta AD parallela baſi FC trianguli FEC. Ergo ED:DC::EA:AF; & componendo,

Uti EC, *ſumma duorum laterum*,

ad DC, *eorum differentiam*;

Ita EF, *tangens ſemiſummæ duorum angulorum* A & C, *lateribus* BA, BC *oppoſitorum*,

ad AF, *tangentem ſemiſſeos differentiæ eorundem angulorum*. Quod erat &c.

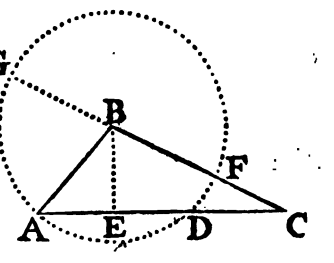
Corollarium.

90. ITaque in omni triangulo ſumma laterum, differentia laterum, tangens ſemiſummæ angulorum oppoſitorum, & tangens ſemidifferentiæ eorumdem, ſunt termini proportionales.

PROPOSITIO VII.

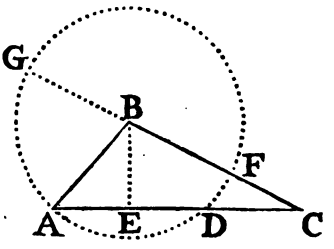
THEOREMA.

91. IN *omni triangulo* ABC, *ut eſt latus maximum* AC *ad ſummam reliquorum* BA, BC, *ita horum differentia* FC *eſt ad differentiam* DC *inter ſegmenta* EA, EC *facta a perpendiculari ab angulo oppoſito demiſsâ in latus maximum*.



Demonſtratio. Centro B, intervallo lateris minimi AB, circulus deſcribatur, ſecans reliqua latera in F & D. Ca-

D. Cadat porro in AC perpendicularis BE, quæ ipſam AD biſecabit; producaturque CB in G. Erunt igitur EA, EC ſegmenta facta a perpendiculari, quorum differentia DC; ſumma laterum BA, BC eſt CG, quorum differentia FC. Itaque (*n.* 560. *Geom. planæ*), quoniam rectangulum ſub AC & CD æquatur rectangulo ſub GC & FC, erunt latera reciprocè proportionalia (*n.* 376. *Geom. planæ*); hinc,



Uti AC, *latus maximum*,
ad GC, *ſummam reliquorum* BA, BC;
Ita FC, *horum differentia*,
ad DC, *differentiam ſegmentorum* EA, EC *lateris maximi*.

Scholion.

92. *DUo latera* BA, BC *neceſſariò debent eſſe inæqualia: duo autem* AB, AC, *vel* AC, CB *poſſunt eſſe æqualia; & tunc pro latere maximo ſumi poteſt utrumlibet laterum* AC, CB *æqualium*.

Corollarium.

93. IN omni triangulo latus maximum, ſumma laterum reliquorum, differentia eorumdem, differentia ſegmentorum lateris maximi, ſunt termini proportionales.

Ana-

Analyſis Trianguli rectanguli.

94. IN omni triangulorum analyſi ſemper tria data eſſe oportet, nimirum, vel duo anguli cum latere, vel duo latera cum angulo, aut omnes anguli, vel omnia latera; reliqua verò quæſita.

95. In analyſi autem trianguli rectanguli, quamvis ſolùm duo data exprimantur, ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui per ſe eſt notus.

96. Quia verò ex Elementis Geometriæ planæ conſtat, cujuſcumque trianguli tres angulos ſimul ſumptos efficere gradus 180; hinc, ſi in quovis triangulo noti ſint duo anguli, etiam tertius innoteſcet; atque hac de cauſa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur eſſe datus.

Similiter, ſi in quovis triangulo notus ſit unus angulus, innoteſcit etiam ſumma reliquorum; in triangulo autem rectangulo dato acuto uno, etiam acutus alter notus erit. Omnia conſtant ex n. 213. Geom. planæ.

97. Dato angulo, datur ex tabulis ſinus ejuſdem, aut tangens, aut ſecans; & viciſſim dato ſinu &c., datur angulus.

98. Termini proportionales dicuntur noti, qui numeris exprimuntur; hoc eſt, quando ſcitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

99. Adverto denique ſinus, tangentes, ſecantes in canone diſponi ultimis duabus figuris ſeparatis; quæ quidem ad calculi facilitatem relinqui poterunt, reſiduo addendo unitatem, ſi opus fuerit, ut alibi docuimus.

AXIOMA.

100. *SI duæ quantitates* A *&* B *notæ fuerint ſecundùm quamvis earumdem menſuram, & earum una* A *etiam nota ſit in alia menſura, puta, pedum &c., tunc etiam altera* B *in eadem pedum menſura neceſſariò innoteſcet per regulam proportionum.*

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

101. *DAtis, hypotenuſa* AC *pedum* 100, *& angulo adjacente* A *grad.* 59, *reliqua latera* CB, BA *invenire.*

Reſolutio. Fiat (*n.* 76.):

Ut data hypotenuſa AC, *prout eſt ſinus totus, ſeu radius,* 10000000,

ad latus quæſitum CB, *prout eſt ſinus anguli* A *grad.* 59, 8571673;

Ita eadem hypotenuſa AC, *prout eſt pedum* 100,

ad ejuſdem lateris CB *pedes quæſitos.*

Invenientur eſſe $85\frac{7167300}{10000000}$.

Hæc autem ipſiſſima analogia ſic etiam poſſet efferri (*n.* 100.).

Quando hypotenuſa AC *intelligitur diviſa in partes* 10000000,

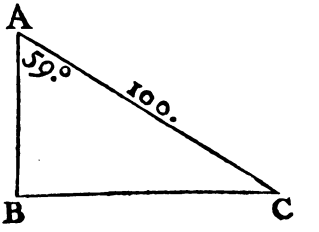
latus CB *earumdem partium continet* 8571673;

Sin autem eadem hypotenuſa AC *ſit dumtaxat diviſa in partes* 100,

Quot ejuſmodi partium continebit idem latus CB?

Non

Non abſimilis inventio erit lateris BA. Nam dato acuto uno A, datur acutus alter C. Ratio pendet ex n. 16. & 26. Ibi enim oſtenſum eſt, ſi hypotenuſa ponatur tanquam radius, duo reliqua latera evadere ſinus angulorum oppoſitorum.



PROPOSITIO II.

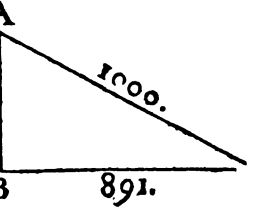
PROBLEMA.

102. *Datis, hypotenuſa* AC *in quavis menſura, puta, hexapedarum* 1000, *& uno latere* BC 891 *hexap., invenire acutos angulos* A *& C, & latus alterum* AB.

Reſolutio. Fiat (*n.* 76.):

Ut hyp. data AC *hexapedarum* 1000,
ad latus datum BC *hexapedarum* 891;
Ita eadem hyp. AC, *prout eſt radius,* 10000000,
ad anguli ignoti A, *qui dato lateri opponitur, ſinum* 8910000.

In canone trigonometrico, cùm ſinus iſte non inveniatur, quærendus erit proximè æqualis 8910065; cui adſcriptus eſt angulus grad. 63, qui per n. 68. adhuc reperietur exactiùs. Invento acuto A, datur etiam acutus alter C grad. 27.



Quoniam verò in triangulo rectangulo nota eſt hypotenuſa AC cum angulo adjacente A, latus quæſitum AB invenietur per Probl. præced.

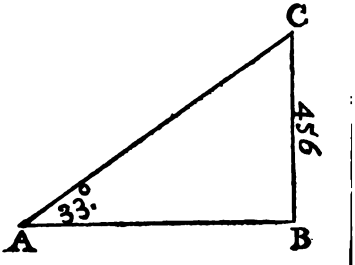
PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

103. *DAtis, crure* BC *bexap.* 456, *& angulo oppoſito* A *grad.* 33, *quærere hypotenuſam.*

Reſolutio. Fiat (*n.* 75.):

Ut ſinus anguli A
ad radium;
Ita latus BC
ad hyp. quæſitam.



PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

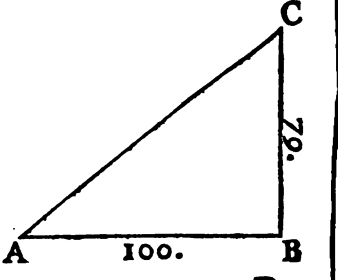
104. *DUobus lateribus datis,* BC *ped.* 79, *&* BA *ped.* 100, *quærere utrumque acutum angulum* C *&* A, *& hypotenuſam.*

Reſolutio. Fiat (*n.* 78.):

Ut datum latus AB *pedum*	100
ad alterum latus BC *pedum*	79;
Ita ſinus totus	10000000
ad anguli A *quæſiti tangentem*	7900000.

Huic tangenti proximè æqualis invenietur in tabulis 615615; cui adſcriptum reperies angulum grad. 38, qui n. 68. adhuc reperietur exactiùs. Hinc dabitur & alter angulus C grad. 52.

Quia verò noti jam ſunt acuti anguli, & per hyp. etiam latera, hypotenuſa nota fiet n. 103.



De

De Uſu Tangentium.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

105. *DAtis, latere* BC *milliarium* 400, *& angulo adjacente* C *grad.* 36, *quærere latus oppoſitum* AB.

Reſolutio. Fiat (*n.*78.): *Ut radius* 10000000
ad tangentem anguli C, 7265426;
Ita latus BC 400
ad latus AB *quæſitum in eadem menſura,* 290$\frac{3}{5}$.

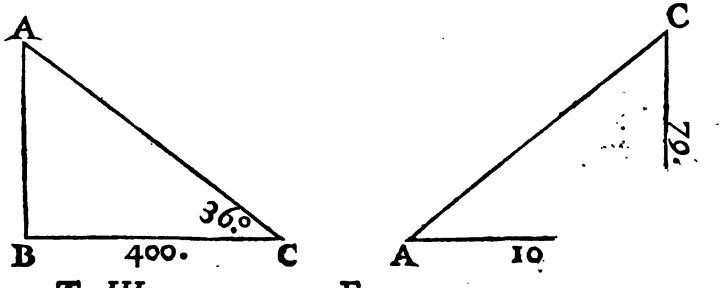
Nam, ſi CB fiat radius, erit BA tangens anguli C; hinc termini proportionales erunt radius, tangens anguli C, latus BC, & latus BA.

106. Simili prorſus methodo reſolves Problema præcedens ope, atque uſu tangentium; nimirum,

Duobus lateribus datis BC, BA, *quærere utrumque acutum angulum* C *&* A.

Reſol. Fiat (*n.*79.): *Ut quodvis datorum laterum* AB
ad reliquum latus datum BC;
Ita ſinus totus
ad tangentem anguli A, *oppoſiti ſecundo termino* BC.

Hæc autem tangens per analogiam inventa, dabit in canone trigonometrico gradus pro valore anguli A, cujus complementum erit alter angulus C.



107. Pariter, *datis lateribus, invenietur hypotenusa*. Nam I. quærantur anguli per Probl. præced. II. quæratur hypotenusa n. 104.

De Usu Secantium.

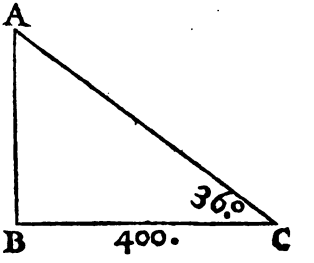
PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

108. *Datis, latere* BC = 400 *pedibus, & angulo adjacente* C = 36 *grad., invenire hypotenusam* AC.

Resolutio. Fiat (*n.* 81.): *Ut radius* 10000000
ad latus cognitum BC *pedum* 400;
Ita secans anguli dati C, 12360680,
ad hypotenusam AC *pedum ferè* 494 $\frac{1}{2}$.

Quoniam, si latus datum BC fiat radius, hypotenusa AC evadit secans anguli C, per n. 82. Erit igitur, ut CB, tanquam radius, ad idem BC, ut latus trianguli; ita CA, ut secans anguli C, ad CA, tanquam hypotenusam.



PROPOSITIO VII.

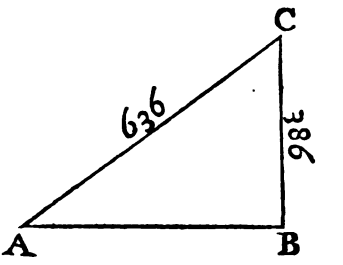
PROBLEMA.

109. *Datis, hypotenusa* AC = 636, *& uno latere* BC = 386 *in eadem mensura, invenire angulum* C *ab iisdem interceptum.*

Resolutio. Fiat (*n.* 80.):
Ut latus BC *ad hypotenusam* AC;
Ita sinus totus ad secantem anguli C.

Hæc

Hæc inventa in columna ſecantium, methodo ſuperiùs explicata, dabit $52^{\circ}, 38'$ pro angulo C, cujus complementum $37^{\circ}, 22'$ erit valor anguli A.



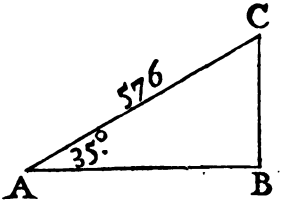
PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

110. *Cognitâ hypotenusâ* AC, *& angulo* A, *invenire latus adjacens* AB.

Reſolutio. Fiat (*n*. 80.):

Ut ſecans anguli A
ad ſinum totum;
Ita hypotenuſa AC
ad latus AB *quæſitum*.



Monitum.

HÆc tria poſtrema Problemata adjecimus, eo conſilio, ut uſus ſecantium Tironibus innoteſceret; nam eadem reſolvi peræquè poſſunt ope ſinuum.

Analyſis Trianguli obliquanguli.

DEFINITIONES.

111. TRiangulum, in quo nullus angulus rectus eſt, *obliquangulum* voco.

112. Angulus *ſpecie* notus dicitur, quando conſtat eum eſſe rectum, aut obtuſum, aut acutum. Similiter arcus dicitur *ſpecie* notus, quando ſcitur, utrum ſit quadrans, aut quadrante major, vel minor. Propriè tamen, quando arcus eſt quadrans, vel angulus rectus, dicetur uterque datus *magnitudine*, nimirum, grad. 90.

Scholion.

AD *calculi facilitatem omitti poterunt duæ ultimæ figuræ, quæ puncto ſeparantur a reliquis in canone ſinuum &c.; ut dictum eſt Obſervatione* 3 *&* 4, *n.* 71. *&* 72.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

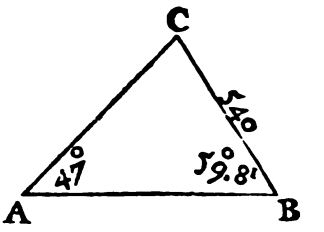
113. DAtis *angulis, & uno latere, invenire latera reliqua.*

Reſolutio. In triangulo ABC eſto latus BC = 540 ped., & angulus A 47°, & angulus B 59°, 8′: tertius angulus C erit 73°, 52′. Invenietur itaque latus AC hac inſtituta analogia. Fiat (*n.* 83.):

Ut ſinus anguli A,	73135
ad ſinum anguli B,	85836;
Ita latus BC, *oppoſitum primo angulo* A,	540
ad latus AC, *oppoſitum ſecundo angulo* B,	634.

Nam latera ſinibus angulorum ipſis oppoſitorum ſunt

ſunt proportionalia. Sin autem lubeat cognoſcere latus AB, ſubſtituatur in analogia pro ſecundo termino ſinus anguli C, loco ſinus anguli B; & invenietur latus AB pedum 709.



114. Quod ſi angulus obtuſus haberetur, per ſinum ſui ſupplementi inſtituenda eſſet reſolutio (*n.* 88.). Eſto triangulum ABC, cujus notum ſit latus AC = 462, & angulus B 42°, & angulus obtuſus A 104°; quæraturque latus BC in eadem menſura.

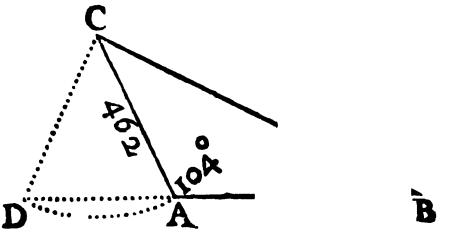
In canone trigonometrico inveniatur ſinus ſupplementi anguli obtuſi dati, nimirum, ſinus anguli 76°; inſtituaturque hæc analogia:

Uti ſinus anguli B,	66913
ad ſinum ſupplementi anguli obtuſi A,	97030;
Ita latus AC	462
ad latus quæſitum BC	670.

Quæ analogia in eamdem illam recidit, quæ prodiret, ſi centro C, intervallo AC, deſcribatur arcus AD, ducaturque CD, atque ita dicatur:

Uti ſinus anguli B *ad ſinum anguli* D;
Ita latus CD = AC, *ad latus quæſitum* BC.

Verum quidem eſt, differre maximè inter ſe duo triangula BCA, BCD; ſed hoc loco non conſideratur area triangulorum, ſed unicè ratio laterum, & ſinuum angulorum.



LEMMA.

115. *SI a ſemiſumma duarum quantitatum ſubtrahatur ſemidifferentia, relinquitur quantitas minor; Si verò ſemiſummæ duarum quantitatum addatur ſemidifferentia, prodit quantitas major.*

Demonſtratio. Numerus major componitur ex minore, & differentiâ, ut patet; ergo ſumma duorum numerorum inæqualium componitur ex quantitate minore bis ſumpta, & differentiâ; ac proinde ſemiſumma componitur ex minore, & ſemidifferentiâ. Quare, ſi a ſemiſumma ſubtrahatur ſemidifferentia, relinquitur minor quantitas. Quod erat unum.

Sin autem ſemiſummæ duorum numerorum addatur ſemidifferentia eorumdem, aggregatum erit compoſitum ex quantitate minore, & differentiâ; adeoque, utì antea demonſtratum eſt, erit numerus major. Quod erat alterum.

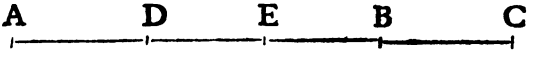
Exemplum. Sint duo numeri 11 & 3, quorum ſumma 14, ſemiſumma 7, differentia 8, ſemidifferentia 4. Fiat ergo, $7-4=3$, quantitas minor;
$7+4=11$, quantitas major.

Corollarium.

116. HInc datis duarum quantitatum ſumma 14, & differentia 8, quantitates ipſæ inveniuntur.

Nam, ſi ad ſemiſummam addatur ſemidifferentia, aggregatum erit æquale majori; ſi autem a ſemiſumma ſubducatur ſemidifferentia, reſiduum erit æquale minori; utì antea demonſtratum eſt; & ulteriùs etiam ita declaratur, & oculis ſubjicitur.

Sint enim AB, BC duæ quantitates. Capiatur $AD=BC$: fiet DB differentia; harum quantitatum



ſumma

ſumma eſt AC, quæ biſecta in E, dat AE, vel EC ſemiſummam, & DE, vel EB ſemidifferentiam. Porro eſt AB = AE + EB = ſemiſummæ + ſemidifferentia; & BC = CE — EB = ſemiſummæ — ſemidifferentia.

PROPOSITIO X.

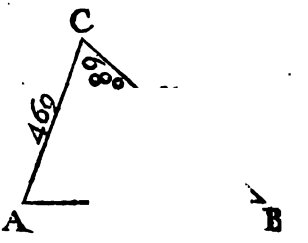
PROBLEMA.

117. *Datis duobus lateribus, & angulo ab iiſdem intercepto, reliquos angulos invenire.*

Reſolutio. Eſto triangulum ABC; & latus AC = 469, & BC = 584 in eadem menſura, & angulus C gr. 68: ſumma laterum AC + BC = 1053; & eorum differentia BC — AC = 115; ſubducatur deinde angulus C gr. 68, a gradibus 180; reſiduum 112 erit ſumma duorum angulorum B & A; & hujus ſummæ ſemiſſis = 56. Fiat ergo ex præſcripto n. 89.

Uti ſumma duorum laterum AC + BC, 1053
ad eorum differentiam 115;
Ita tangens grad. 56, *ſemiſſeos ſummæ duorum angulorum* A & B, 148256
ad quartum terminum 16196;

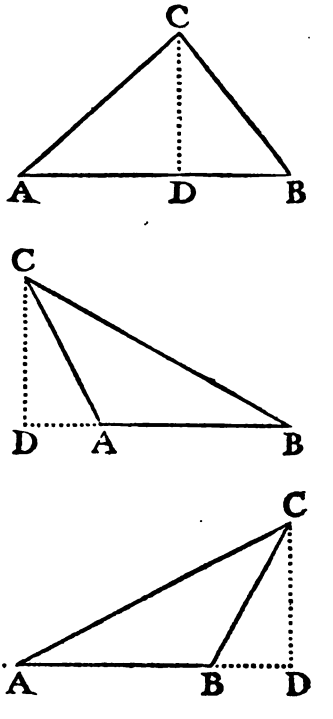
qui exhibet tangentem ſemiſſeos differentiæ eorundem angulorum A & B. Hæc in canone trigonometrico invenietur reſpondere $9^{\circ}\ 12'$; quibus ſublatis a gradibus 56, ſemiſſi ſummæ duorum angulorum incognitorum, reſiduum $46^{\circ}\ 48'$ erit, per Lemma, valor anguli B, oppoſiti lateri minori AC; iidemque gradus $9^{\circ}\ 12'$ additi eidem ſemiſſi 56°, dabunt $65^{\circ}\ 12'$ pro angulo A, oppoſito lateri majori BC, per idem Lem.



Aliter.

118. Data ſint duo latera AB, AC, cum angulo intercepto A. Ex utrolibet angulo ignoto, puta, ex angulo C, demittatur perpendicularis CD in latus oppoſitum; & habebuntur duo triangula rectangula ADC, BDC.

In primo triangulo rectangulo ADC, ex datis, nimirum, angulo recto D, & angulo A, & hypotenuſa AC, elicietur perpendicularis CD (*n.* 101.), & ſegmentum AD ab angulo A, & perpendiculari CD interceptum; quo dempto ex AB dato per hyp., ut in Fig. 1., vel addendo AD ipſi AB, ut in Fig. 2., vel denique ſubducendo AB ab invento latere AD, ut in Fig. 3., notum fiet in omni caſu ſegmentum, vel latus alterum BD. Cognitis BD, & perpendiculari CD, invenietur facilè (*n.* 104.) angulus B trianguli rectanguli BDC, & conſequenter angulus incognitus BCA.



Ad majorem calculi facilitatem conducet, ſi fiat, ut perpendicularis cadat in latus majus ex duobus datis.

Aliter.

119. Inveniri etiam poſſet angulus B, quin quæratur perpendicularis CD.

Nam

Nam invento ſegmento AD, ſi conſideretur perpendicularis CD tanquam radius, ſegmentum AD evadit tangens anguli ACD, & ſegmentum BD, tangens anguli BCD. Quia verò tres primi termini hujus alterius analogiæ inſtituendæ, ſunt probè cogniti, nimirum, ſegmentum AD, ſegmentum BD, & tangens anguli ACD, invenietur tangens anguli BCD, & conſequenter angulus ipſe, hoc pacto:

Uti ſegmentum AD *ad ſegmentum* BD;
Ita tangens anguli ACD *ad tangentem anguli* BCD,
cujus complementum erit angulus quæſitus B.

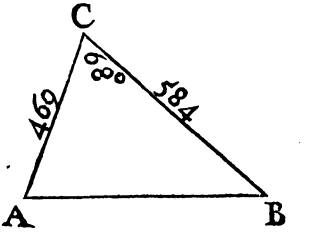
In hac autem analogia eſt eadem adhibenda ratiocinatio, quæ in aliis analogiis numerorum 101, 102, 105 inſtituta eſt.

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA.

120. *Datis cruribus* AC, BC, *& angulo intercepto* C, *invenire tertium latus* AB.

Reſolutio. Primò per Probl. præced. quærantur anguli A & B; deinde per Problema IX. latus tertium AB.



PROPOSITIO XII.

PROBLEMA.

121. *Datis tribus lateribus, quærere angulum quemvis.*

Reſo-

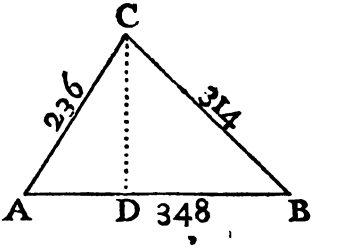
Reſolutio. Eſto triangulum ABC, cujus latus AB = 348 ped., AC = 236, & BC = 314: Quæritur trium angulorum valor.

Ab angulo C, lateri majori oppoſito, demittatur perpendicularis CD; adde duo minora latera AC + BC = 550, ut habeatur eorum ſumma: ſubtrahe minus latus AC a medio BC, ut innoteſcat differentia AC — BC = 78; & per analogiam n. 91. fiat:

Ut latus maximum AB	348
ad ſummam reliquorum AC + BC,	550;
Ita horum differentia	78
ad quartum terminum	123.

Hic enim erit differentia ſegmentorum AD, BD, quæ facta fuerunt a perpendiculari CD. Hæc differentia inventa 123 ſubducatur a maximo latere AB 348; reſidui 225 ſumatur ſemiſſis $112\frac{1}{2}$, quæ erit ſegmentum minus AD, per Lem.: hæc eadem ſemiſſis $112\frac{1}{2}$ addatur quarto termino 123; ſumma $235\frac{1}{2}$ erit ſegmentum majus BD.

Quamobrem in quolibet triangulo rectangulo ACD, BCD, præter angulum rectum cognoſcitur hypotenuſa, & unum latus; ergo (*n.* 102.) inveniantur anguli ACD, BCD, & conſequenter eorum complementa A & B.



PROPOSITIO XIII.

PROBLEMA.

122. *Datis duobus lateribus* CB, CA *trianguli non rectanguli, & dato angulo* B *uni eorum laterum*

rum CA *oppoſito, quærere angulum* A *oppoſitum reliquo dato lateri* BC.

Oportet autem angulum quæſitum A eſſe *ſpecie* præcognitum; hoc eſt, conſtare, num ſit acutus, an obtuſus, ſi datus angulus B acutus eſt.

Reſolutio. Fiat:

Ut CA, *datum latus, dato angulo* B *oppoſitum,*

ad alterum latus datum CB;

Ita ſinus anguli dati B

ad ſinum ignoti anguli A, *qui alteri lateri dato* BC *opponitur*.

Latera enim BC, CA ſinibus angulorum A, B ipſis oppoſitorum ſunt proportionalia. Quare, cùm tres primi termini ſint noti, etiam quartus innoteſcet, nempe ſinus anguli ignoti A; & per ſinum invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit. Sin autem angulus quæſitus A ſit obtuſus, tunc angulus per ſinum inventus, ſubtractus a 180 gradibus relinquet quæſitum A.

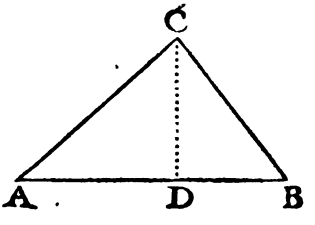
Neceſſe igitur hìc eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliunde nota ſit.

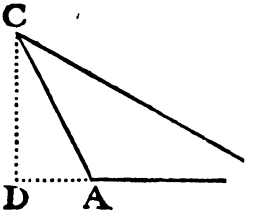
Inventis angulis latus ignotum CA innoteſcet n. 113.

123. *Aliter* per reductionem ad triangula rectangula CDB, CDA, ducto perpendiculo CD.

I. In triangulo rectangulo CDB ex data hypotenuſa CB, & angulo B, quæratur latus CD ex n. 101.

II. In altero triangulo CDA ex hypotenuſa CA, & crure CD cognitis, inveniatur n. 102. angulus A;





qui vel ipſe, vel ejus ſupplementum erit angulus quæſitus.

Ad inventionem igitur anguli, & lateris neceſſe eſt, ut aliunde ejuſdem anguli nota ſit ſpecies.

Scholion.

P. *Clavius in ſua analyſi triangulorum Prop.* 13., *verè notat, Nicolaum Copernicum, alioquin diligentiſſimum, hallucinatum fuiſſe Lib.* 1. *Revolutionum, Prop.* 6. *triangulorum rectilineorum, dum ſimpliciter proponit ſine ulla limitatione:* Si duo latera trianguli data ſint, & angulus uni eorum oppoſitus, datus etiam, reliquum latus, & reliquos angulos dari poſſe. *Hoc enim fieri non poteſt, quando datus angulus eſt acutus, niſi conſtet, num angulus alteri laterum datorum oppoſitus, ſit acutus, an obtuſus.*

Nolim tamen Tirones ſollicitos eſſe de hoc caſu, qui rarò admodum in praxi contingit.

SY-

SYNOPSIS.

SOLUTIONES TRIGONOMETRICÆ

Trianguli Rectanguli.

I.

Datis AB, BC *cruribus*,
Quæruntur anguli?

Fiat, AB:BC::*radius*:*tang. anguli* A, cujus complementum eſt angulus C.

II.

Datis AB, AC, *crure & hypotenuſa*,
Quæruntur anguli?

Fiat, AC:AB::*radius*:*ſin. anguli* C, cujus complementum eſt angulus A.

III.

Datis AB & A, *crure & angulo*,
Quæritur BC *crus alterum?*

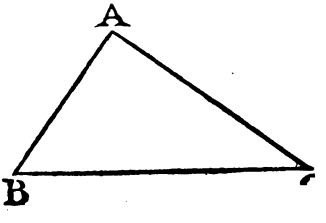
Fiat, *Radius*:*tang. anguli* A::AB:BC.

IV.

Datis AB & C, *crure & angulo*,
Quæritur AC *hypotenuſa?*

Fiat, *Sin. anguli* C:*rad.*::AB:AC.

Reliquæ omnes ſolutiones trianguli rectanguli ad haſce quatuor reducuntur.



in-

Trianguli Obliquanguli

SOLUTIONES.

I.

Datis A, B, C & AB, *angulis & latere*,
Quæruntur BC & AC *latera?*

Fiat, *Sinus anguli* C : *ſin. anguli* A :: AB : BC;
Item, *Sinus anguli* C : *ſin. anguli* B :: AB : AC.

Cùm dantur duo anguli, & unum latus, reliqua etiam quæruntur, quia tertius angulus datur.

II.

Datis A, B, C, *omnibus angulis*,
Quæruntur AB, AC, BC, *omnia latera?*

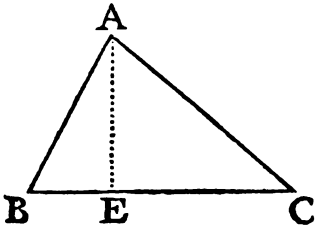
Fiat, *Sin. anguli* C : *ſin. anguli* A :: AB : BC;
Et *Sin. anguli* C : *ſin. anguli* B :: AB : AC.

Unde datis angulis invenire licet proportiones laterum, at non ipſa latera, niſi ipſorum unum prius innoteſcat.

III.

Datis AB, BC & C, *duobus lateribus & angulo uni oppoſito*,
Quæruntur A & B *anguli?*

Fiat, AB : BC :: *ſin. anguli* C : *ſin. anguli* A,
qui proinde invenietur. Sed quia idem eſt ſinus anguli, & ejus complementi ad duos rectos, præcognoſcenda eſt anguli A ſpecies.



IV.

IV.

Datis AB, BC *&* B, *lateribus duobus & angulo interjecto,*
Quæruntur anguli A *&* C?

Fiat, $BC + AB : BC - AB :: tang.\ semisummæ \frac{A+C}{2} : tang.\ semidifferentiæ \frac{A-C}{2}$.

Unde dabitur differentia angulorum A & C, quorum ſumma quoque nota eſt; ac proinde per Lemma n. 115. dabuntur ipſi anguli.

V.

Datis AB, BC, AC, *omnibus lateribus,*
Quæruntur anguli?

Demiſſo a vertice in baſim perpendiculo, quærantur ſegmenta BE, CE baſis; & proinde per analyſim utriuſque trianguli rectanguli AEB, AEC, dabuntur ipſi anguli.

PRAXIS TRIGONOMETRICA

Altimetriæ, & Longimetriæ.

CUM jamdiu compererim, admodum paucos eſſe, qui non in Mathematicis exerceantur eo conſilio, ut, quæ didicerint, ad aliquem uſum trahant; Trigonometriæ partes ſingulas ita digerere, ac temperare ſtudui, ut, qui fructus ex hujus diſciplinæ uſu percipi poſſint ad humanæ vitæ commoda, non inani venditatione, ſed re ipſa conſtaret. Etenim, dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depreſſiones, locorum omnium inæqualitates inter ſe, & intervalla deprehendere metiendo debeamus; neminem latebit, arbitror, quantum commodi, utilitatiſque ſubſtructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi ſyderum, aliiſque artibus, & diſciplinis ex horum cognitione manare poſſit.

Quamvis autem ad dimetiendas rerum diſtantias, & altitudines varia Geometræ inſtrumenta, ſive organa excogitarint; tamen, ne varietate rerum, & praxium multitudine Tirones præpediam potiùs, quàm inſtruam, non alio utendum cenſui inſtrumento, quàm ſemicirculo, & quadrante, quo nihil ſimplicius, nihil parabilius. Hujus inſtrumenti uſum in capiendis angulis, deſcriptum habes Tomo I. Geometriæ, numero 64.

DEFINITIONES.

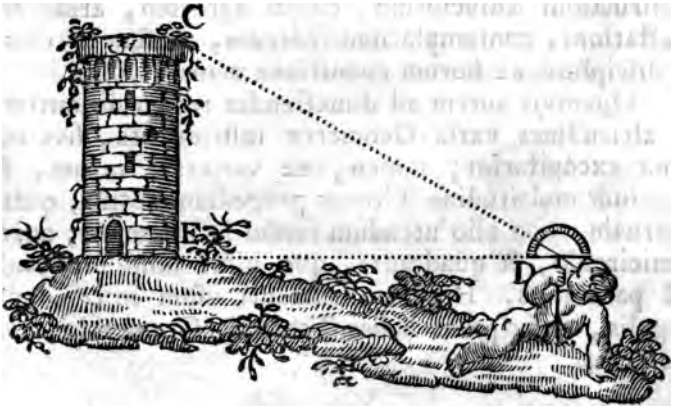
124. *ALtitudo* eſt linea recta ad horizontem, ſeu ad terræ ſuperficiem perpendicularis, ac proinde ad terræ centrum directa.

125. *Diſtantia oculi ab altitudine menſuranda*, eſt recta DE, ab oculo D ad altitudinem CE perpendicularis.

126. *Diſtantia oculi ab aliquo puncto* C, eſt linea recta ab oculi centro D ad punctum C extenſa.

127. *Angulus altitudinis* eſt CDE, quem in oculo D efficit diſtantia DE cum radio DC a vertice altitudinis ad oculum emiſſo.

128. *Angulus intervalli duorum locorum* eſt ille, quem in oculo efficiunt bini radii ab iiſdem locis directi.



129. *Altitudo acceſſibilis* dicitur, cujus diſtantia mechanicè menſurari poteſt.

130. *Altitudo inacceſſa*, cujus diſtantia non poteſt mechanicè menſurari.

PROBLEMA I.

131. *Diſtantiam in una dumtaxat extremitate acceſſibilem metiri.*

Reſolutio. Eſto AC latitudo fluminis, aut lacus, quam metiri oporteat. Qua parte acceſſibilis eſt, metire mechanicè longitudinem quamlibet AB, quæ proportionalis eſſe debet diſtantiæ menſurandæ, ut infra docebitur Obſervatione V.; defixàque haſtà in punctis A & B, ope ſemicirculi, aut quadrantis, cape angulos BAC, ABC, quibus cognitis, tertius quoque angulus notus erit. Fiat itaque (*n.* 113.):

Ut ſinus anguli C
ad ſinum anguli B;
Ita latus cognitum AB *in certa quavis menſura,*
ad latus quæſitum AC *in eadem menſura.*

Esto angulus A = 75°. 30';
angulus B = 70°. 20';
& consequenter angulus C = 34°. 10'.

Ex tabulis habeo sinum anguli C 34°. 10' = 5616021;
sinum anguli B 70°. 20' = 9416665;
aliunde longitudo A B ponitur esse hexapedarum 1269; quamobrem hæc proportio habebitur:

5616021 : 9416665 :: 1269 : A C

distantiam quæsitam; quæ per regulam trium invenietur esse hexapedarum $2127\frac{4}{5}$.

Corollarium I.

132. SI distantia A C, in altera tantum extremitate C inaccessibilis, maximo intervallo recederet, puta, ad tria milliaria, non ita facile Mensor, qua parte extremitas altera accessibilis est, metiri interdum mechanicè posset longitudinem aliquam, quæ sit huic distantiæ proportionalis, puta, unius milliaris, aut saltem semimilliaris. Usuvenire enim interdum potest,

ut

ut propter ſoli inæqualitates, aliave impedimenta, menſurari mechanicè non poſſit longitudo tanta, quanta requiritur. Docent itaque in hoc caſu, longitudinem aliam mediocrem inſtar baſis alterius trianguli capiendam, cujus ope per idem Problema in eadem planitie inveniatur longitudo altera triplò, aut quadruplò major; & rurſum, ſi opus ſit, per hanc ſecundam longitudinem eadem conſtructione inquiratur tertia major, quantum ſatis eſt, ut hæc denique proportionalis evadat diſtantiæ primæ menſurandæ.

Corollarium II.

133. HÆc operatio uſui eſſe ſolet ad Ichnographiam regionum, aut caſtrorum militarium delineandam, poſitionemque punctorum principalium determinandam, ad quæ reliquæ partes referantur.

Corollarium III.

134. IN arcium præterea oppugnationibus, ſi cuniculi ſubterranei ducendi ſunt ad propugnaculum, furnulique ſubtus conſtruendi, ut disjiciatur pars aliqua propugnaculi, eique labes, & ruina inferatur, hæc imprimis operatio ab Architecto militari erit ſedulò adhibenda. Nam diſtantia loci, ubi effoditur cuniculus, ad propugnaculum, ad quod dirigitur, accuratè capienda eſt, ut cuniculus in tantam longitudinem perducatur, quantà opus eſt ad disjiciendum propugnaculum.

PROBLEMA II.

135. *INvenire diſtantiam inter duo objecta* A *&* C, *ambo inacceſſibilia, quæ tamen conſpici poſſint.*

Reſolutio. In planitie circumpoſità menſuranda eſt longitudo quæpiam BD, a cujus extremitatibus conſpici poſſint duo objecta A & C; atque extremitates hujus lineæ BD ſignandæ erunt haſtis defixis in B & D.

Eligatur prima ſtatio in B; ac ſeparatim capienda erit quantitas angulorum ABD, ABC, CBD: dixi *ſeparatim*; nam, ſi quatuor puncta A, B, C, D non eſſent in eodem plano, angulus ABD minor foret ſummà duorum angulorum ABC, CBD, ex quibus videtur componi.

Secunda ſtatio fiat in D; ac ſeparatim menſurentur duo anguli ADB, CDB.

His captis menſuris, duo habebuntur triangula BAD, BCD; & in horum quolibet cognoſcentur duo anguli, & unum latus.

Ita-

Itaque I. Ope trianguli ABD, cujus unum latus BD cognitum eſt, & duo anguli ABD, ADB noti pariter ſunt, invenietur latus AB (*n.* 113.).

II. Ope trianguli BCD, in quo, præter latus BD, noti ſunt duo anguli CBD, CDB, invenietur latus CB (*n.* 113.).

III. Denique ope trianguli ABC, cujus duo latera AB, BC jam innotuerunt, & angulus ABC pariter notus eſt, invenientur (*n.* 117.) duo anguli BAC, BCA, & latus AC; qua poſtrema operatione reſolvitur Problema.

Corollarium.

136. HÆc reſolutio viam aperit, qua per datum punctum B duci poſſit recta BE parallela rectæ AC inacceſſibili.

Nam, invento, ut prius, angulo CAB trianguli ABC, duci poterit per datum punctum B recta BE, quæ cum recta AB efficiat angulum ABE æqualem alterno BAC; ac proinde recta BE parallela erit ipſi AC.

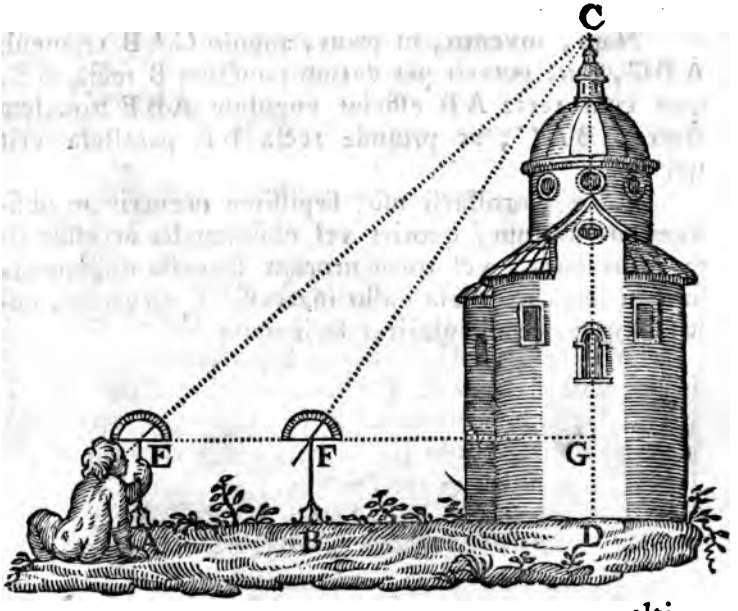
Hujus Corollarii uſus ſæpiſſimè occurrit in obſidionibus arcium, quoties vel obſidionales acceſſus rite inſtituendi, vel tormentorum ſuggeſta diſponenda ſunt in linea parallela vallo inacceſſibili diruendo, cujus latus perpendiculariter feriendum.

PROBLEMA III.

137. *Diſtantiam inacceſſam montis, vel turris per duas ſtationes metiri.*

Reſolutio. Turris, ſeu tholi templi maximi altitudo ſit GC; diſtantia EG. In ipſa linea diſtantiæ eligantur duæ ſtationes in E & F, quarum intervallum mechanicè menſuretur, puta, pedum 500. Ad hoc præſtandum requiritur planities ampla, & patens, ut accedere ad rem diſtantem, aut recedere ab ea tanto intervallo poſſis, quanto opus eſt. Eò autem certior erit dimenſio, quò intervallum fuerit majus, ut infra exponam.

Semicirculus ad metiendos angulos altitudinis aptetur in utraque ſtatione, ut in Fig.; & inveniantur



alti-

altitudinum anguli CFG, CEG, quibus ſubtractis a 90 gradibus, noti fiunt anguli complentes FCG, ECG. Poſito ergo ſinu toto CG, erunt angulorum FCG, ECG tangentes GF, GE; ac proinde EF, intervallum ſtationum, eſt tangentium differentia. Fiat ergo:

Ut EF, *differentia tangentium angulorum* FCG, ECG *complentium altitudinis angulos*,
ad majorem tangentem EG;
Ita EF, *ſtationum intervallum*, *pedum* 500,
ad diſtantiæ EG *pedes quæſitos*.

PROBLEMA IV.

138. *ALtitudinem inacceſſam montis, vel turris metiri.*

Reſolutio. Inſtituatur operatio eadem, quæ fuit adhibita in Probl. præced., binis ſtationibus in linea diſtantiæ in E & F determinatis; tum fiat:

Ut EF, *differentia tangentium angulorum* FCG, ECG *complentium angulos altitudinis*,
ad ſinum totum CG;
Ita EF, *ſtationum intervallum*, *ped.* 500,
ad altitudinis quæſitæ pedes.

Aliter.

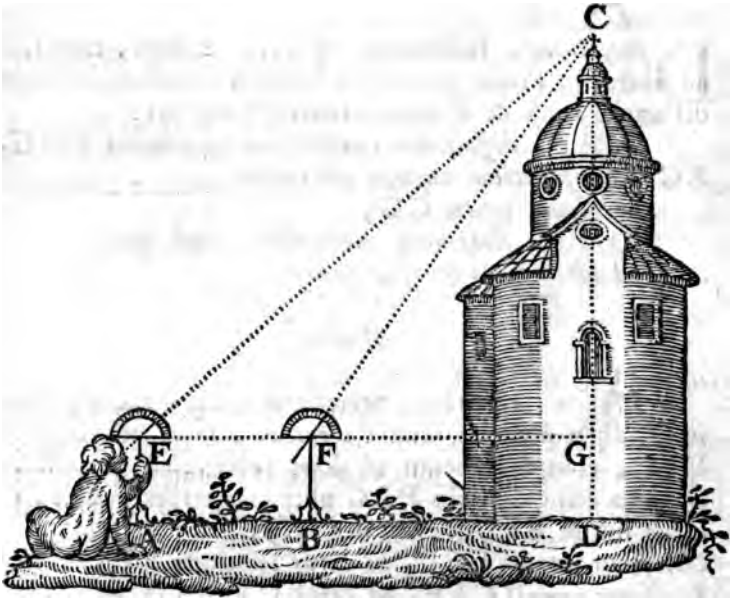
Metire, ut prius, utrumque altitudinis angulum in utraque ſtatione E & F: notus pariter fiet angulus EFC, complementum ad duos rectos; ac proinde trigono obliquangulo EFC noti erunt tres anguli, latus unum EF; quare (*n.* 113.),
Uti ſinus anguli ECF, *ad latus cognitum*
Ita ſinus anguli CEF, *ad latus* CF.
Tria prima ſunt nota; innoteſcet erg

tum, nempe latus FC, in eadem menſura, in qua notum erat EF, ſtationum intervallum. Invento latere FC, inſtituatur hæc altera analogia in trigono rectangulo GFC:

Uti ſinus totus
ad latus FC;
Ita ſinus anguli CFG
ad CG *altitudinem quæſitam.*

Scholion.

INventæ altitudini CG *interdum adjicienda erit Inſtrumenti altitudo* AE=DG; *ita ut ſumma* DC *ſit altitudo integra quæſita.*



PROBLEMA V.

139. *ALtitudinem acceſſibilem metiri.*

Reſolutio. Elige ſtationem in E, cujus diſtantiam EG ab objecto menſurando CG metiri commodè poſſis. Sit autem ea diſtantia mediocris, juxta regulam, quam infra determinabimus. Inſtrumento deinde inveſtigetur angulus CEG, cum quo, & latere EG jam noto, innoteſcet latus alterum CG, altitudo quæſita.

PROBLEMA VI.

DIſtantiam inacceſſam EG, *data objecti altitudine* CG, *metiri.*

Reſolutio. Inveniatur altitudinis angulus CEG; tum, quia in trigono rectangulo CEG, dantur acutorum unus CEG, & latus CG, reperietur latus alterum EG, diſtantia quæſita.

PROBLEMA VII.

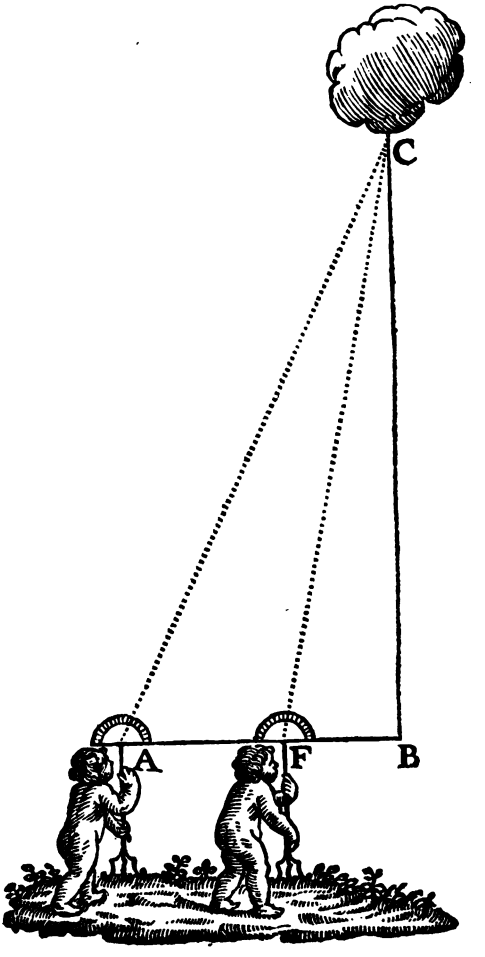
140. *ALtitudinem nubis metiri.*

Reſolutio. Tota difficultas, quæ in hoc negotio occurrit, ex nubium continuo motu oritur; hinc mutatio figuræ nubis continua; unde fit, ut non facilè deſignari in nube poſſit ſtabile punctum, in quod ex duplici ſtatione, ut opus eſt, collimetur. Oportebit igitur nubem ſeligere, quales tranquillo cælo cernuntur, quæ nimirum non moveatur ſenſibiliter, quæ marginem aliquem habeat notabilem, cujus ex

mita

mitas, puta, C, dignoſci poſſit, ut in eam eodem tempore duo Obſervatores, diſtantes ab invicem uno ſaltem milliari, ſigno dato, colliment ex diverſis ſtationibus, anguloſque factos obſervent.

Itaque punctũ in nube collimationibus deſtinatum, eſto C: altitudo quæſita nubis ſit CB: linea diſtantiæ AB; in qua deſignentur binæ ſtationes in A & F, diſtantes juſto intervallo, quod vix eſſe minus poterit aliquot pedum millibus. Noti fiant anguli CAB, CFB, ex quibus, & ſpatio mechanicè noto, per Probl. IV. reperietur altitudo nubis quæſita CB.



Scho-

Scholion.

Ricciolius reperit altitudinem nubis candidæ passum 2177, *seu pedum* 10885.

PROBLEMA VIII.

141. *Ichnographiam Regni, aut Provinciæ trigonometricè perficere.*

Resolutio. Ichnographia Regni, aut Provinciæ, quam vulgò Mappam vocant, perficitur, si insigniora ejusdem loca ita in parvam tabulam transferantur, ut in ea retineant eamdem inter se distantiæ proportionem, quam obtinent in aperta, ac vasta planitie; quod reipsa nihil est aliud, quàm reductio ex magno in parvum. Quia verò hæc reductio non aliter fieri potest, quàm ope triangulorum similium, hinc Ichnographiam regionis alicujus trigonometricè perficere, nihil est aliud, quàm invenire valorem angulorum, & laterum, quæ per locorum intervalla exhibentur.

Areæ campestris, aliorumque similium Ichnographiam docuimus Tom. I. Geometriæ n. 467. At ubi regnorum, aut provinciarum Ichnographia perficienda est, necessariò ad Trigonometriam confugiendum erit; uti mox opere ipso constabit.

Esto itaque delineanda regio, quà latè patet, ampliſſima, eaque in tabulam, seu mappam, ut vocant, traducenda.

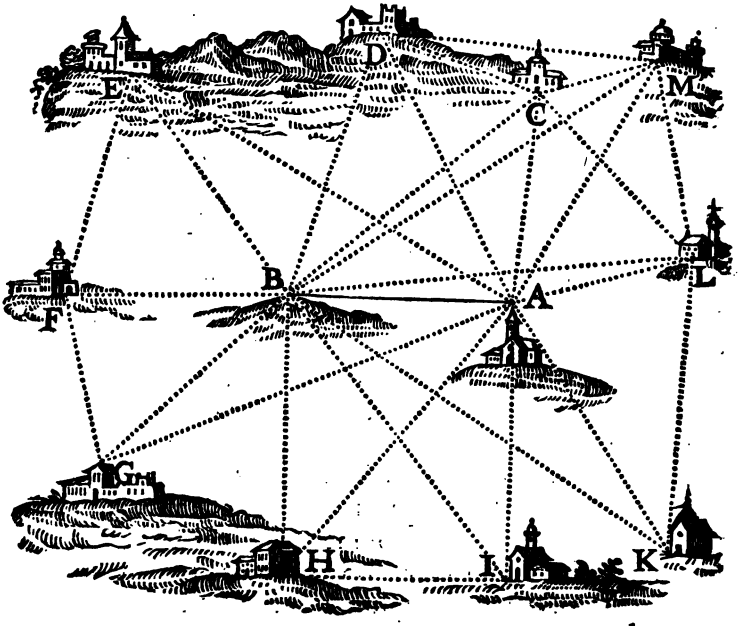
I. Regionem omnem lustret oportet Mensor, urbesque, ac montes, & arces, & loca singula spectabilia, eorumque intervalla observet, ut primas præsertim stationes eligere possit, quæ commodiores videbuntur metiendo reliquo tractui ejusdem regionis

II. In meditullio provinciæ delineandæ, aut bi etiam, uti visum fuerit opportuniùs, seligat M pro basi futuræ Ichnographiæ intervallum duorum

ctor

ctorum A & B, quod ſenſibilem habeat proportionem diſtantiis, quæ menſurandæ ſunt, & in mappam referendæ; atque in iiſdem punctis A & B primas ſtationes determinet. Intervallum AB, quò majus fuerit aſſumptum, eò tutior erit operatio, ut palam faciam Obſerv. II.; nimirum, ſi diſtantiæ pleræque aliorum locorum menſurandæ, proximè accedant ad duo, aut quatuor milliaria, longitudo AB eligatur vel ſemimilliaris, vel unius milliaris, quantum ſatis eſt, ut proportio ſenſibilis retineatur, quoad fieri poterit, cum reliquis diſtantiis.

III. Quia verò longitudo aſſumpta AB, mechanicè vix poſſet accuratè menſurari, præſertim propter inæqualitates terræ, colleſque aſſurgentes; hac de cauſa non aliter fiet nota, quàm calculo trigonometrico per Probl. II. n. 135.; nimirum, in eadem planitie diſtantia



altera

altera multò minor, inſtar baſis, quærenda erit, quam mechanicè metiri facilè poſſit Geometra, & per hanc, Trigonometriæ præſidio, aſſequatur menſuram alterius baſis incognitæ AB multò majoris, quæ uſui eſſe debet immediatè ad determinandam poſitionem punctorum principalium mappæ deſcribendæ.

IV. Eſt autem duplex cautio ab accurato Menſore adhibenda in delectu hujus intervalli, ſeu baſis AB. Prima eſt, ut longitudinem ejuſdem diligentiſſimè exploret; eamque ſemel iterumque inquirat per alias minores baſes, quas ſeligat modò propiùs, modò longiùs, modò ad latus primæ AB, donec in hac obſervationum varietate conſtans longitudo prodeat primæ baſis AB, quæ fundamentum eſſe debet reliquarum operationum. Altera cautio eſt, ut in extremitatibus A & B ſtationes ita figi poſſint a Geometra, ut ab iiſdem plura ſpectari poſſint puncta, nimirum, arces, oppida &c.

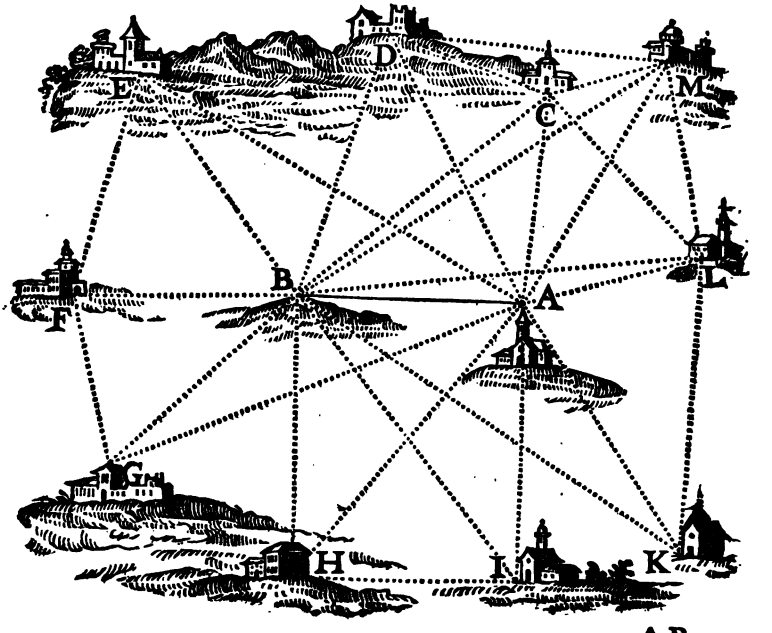
V. Inventa hac diſtantia AB in aliquo genere menſuræ, vel hexapedarum, vel etiam milliarium, incipiat jam Menſor per nota Inſtrumenta in prima ſtatione B angulos metiri ſingulos, quos hæc baſis BA efficit cum lineis directis versùs puncta inſigniora hujus regionis, hoc eſt, angulos ABC, ABD, ABE. Prætereat punctum F, & angulum ABF, quippe qui nimis obtuſus eſſet, & errori obnoxius, ut conſtabit Obſerv. I. & V.; reliquoſque angulos in eadem ſtatione B metiri pergat ABG, ABH, ABI & ABK; ac ſimiliter prætereat punctum L, propter nimiam parvitatem anguli ABL, errori pariter obnoxiam, utì demonſtrabitur Obſerv. I.

VI. Reliquum jam eſt, ut diſtantiarum, ſeu laterum valor determinetur in eodem genere menſuræ, in quo aſſumpſimus baſim BA. Quamobrem Menſor tranſeat oportet ad extremitatem alteram A, nempe ad ſecundam ſtationem; in eaque exquirat quantitatem

anguli

anguli BAE, quo dato, dabitur quoque poſitio puncti E. Nam in triangulo ABE, datis & baſi AB, & valore angulorum EAB, ABE, baſi adjacentium, invenientur latera, ſeu diſtantiæ AE, BE, per Probl. I. n. 131. Similiter in eadem ſtatione A capiantur reliqui anguli BAD, BAC, BAG, BAH, BAI & BAK. Perſpicuum eſt autem, in omnibus hiſce triangulis dari baſim AB, ſeu latus commune, anguloſque eidem lateri adjacentes; quare per idem Probl. invenietur longitudo laterum BD, AD, BC, AC &c.; & punctorum E, D, C &c. poſitio determinabitur.

VII. Cùm autem omiſſa fuerint duo puncta F & L, propter nimiam parvitatem, vel exceſſum anguli in ſtatione B & A, præſtat jam, ut doceam, qua methodo determinari poſſit horum poſitio, & valor diſtantiæ, quin confugiendum ſit ad baſim communem



AB.

AB. Itaque, ut inveniatur punctum F, eligo jam notam diſtantiam BE, vel BG, vel quamlibet aliam, quæ magis expediat; eamque aſſumo inſtar baſis. In rem præſentem ſeligo baſim BE; & in duabus ſtationibus B & E capio angulos EBF & BEF; ac per analyſim hujus trianguli, ut prius, determinabitur valor duorum laterum BF, EF, ac poſitio puncti F. Pariter ſumpta baſi AC, invenietur puncti L, & puncti M poſitio, ſi forte aliqua de cauſa fuerit omiſſa in primis duabus ſtationibus.

VIII. Inventus valor omnium laterum in ſingulis triangulis, facilè jam transferri poterit in mappam geographicam, ſi ope ſcalæ geometricæ, ut jam docuimus Tom. I. Geom. n. 436., detur cuilibet lateri debitus valor in ſcalæ particulis, & angulorum quantitas exactè obſervetur.

IX. Poſteaquam poſitiones horum punctorum accuratè tractæ fuerint in mappam, ſimili prorſus methodo progrediendum erit ad alia puncta, quæ e primis duabus ſtationibus ſpectari non potuerunt. Reliquæ autem operationes multò erunt faciliores; nam ubique occurrent, & uſui eſſe poterunt baſes, quarum valor jam cognitus ſit. Finge enim delineanda eſſe objecta, ultra puncta C & D: aſſumi poterit diſtantia jam nota CD, inſtar baſis. Similiter ex alia parte eligi poterit tanquam baſis, vel longitudo nota IH, vel diſtantia LK; eodemque artificio operaberis in reliquis poſitionibus determinandis, & in mappam transferendis.

OBSERVATIONES

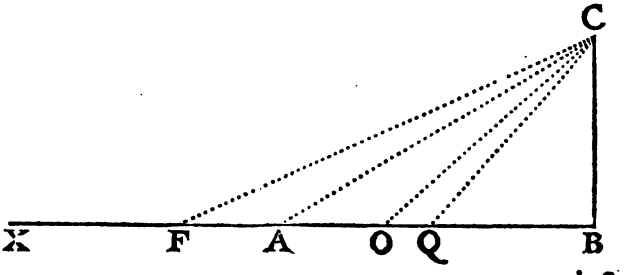
Fallaciarum complurium, quæ in Praxim trigonometricam Altimetriæ, & Longimetriæ ſolent irrepere.

VEriſſimè olim monuit P. Tacquet in ſua Geometrica practica, Geometras, qui de hoc argumento ſcribere ſolent, praxes ſuas ſine ulla limitatione proponere; unde fit, ut ii, qui in rebus geometricis parum ſunt verſati, dum abſque ulla limitatione, ubique, & ſemper eodem modo operantur, in magnos errores incidant, neque ſatis, ex quibus naſcantur cauſis, aſſequantur. Quare facturus me operæ pretium cenſui, ſi quas inſignis hic Auctor, aliique Scriptores acutè indicarunt errorum origines, & limitationes neceſſarias ſuis locis adhibendas, in hunc ego locum eas congeram, ut praxis a theoria nequaquam aberret.

OBSERVATIO I.

142. *ERror vel minimus ſub angulo altitudinis valde parvo commiſſus, multò majorem diſtantiæ cauſat errorem, quàm defectus idem ſub angulo altitudinis magno.*

Altitudo montis ſit BC: diſtantia horizontaliter



infi-

infinitè extenſa BX. Finge tibi exilem aliquem angulum altitudinis, in ſtatione videlicet admodum remota, inventum eſſe BAC, qui vero angulo altitudinis major ſit; verus autem ſit CFB. Quoniam CAB externus, utrique CFB, & FCA æqualis eſt ex Elem., erit FCA differentia falſi CAB, & veri CFB; quare angulus FCA eſt ipſe error, ſeu erroris quantitas.

Pone rurſum, in ſtatione viciniore repertum eſſe aliquem altitudinis angulum præcedenti majorem CQB, qui a vero COB etiam differat angulo OCQ. Sint autem anguli, hoc eſt, errores ambo FCA, OCQ æquales. Nihilo tamen minus, etiam data errorum æqualitate, manifeſtum eſt angulum FCA longè majorem intercipere partem FA in linea diſtantiæ, quàm ſit OQ intercepta ab angulo æquali OCQ. Sunt autem FA, OQ errores diſtantiæ; ſiquidem FB eſt diſtantia vera, collecta ex vero angulo altitudinis CFB; & AB eſt diſtantia falſa, deducta ex falſo angulo CAB; ac proinde FA, diſtantiæ veræ, ac falſæ differentia, eſt error diſtantiæ. Atque idem oſtenditur in OQ.

Corollarium I.

143. ITaque, cùm peccatur in parvo altitudinis angulo, error diſtantiæ multò major eſt, quàm in magno.

Corollarium II.

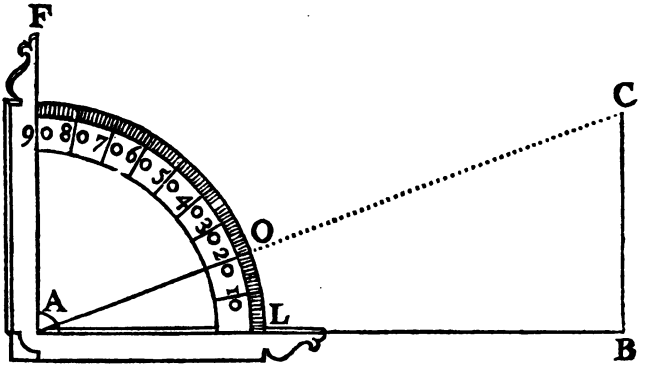
144. HInc ſub angulo altitudinis valde parvo incerta ſemper erit diſtantiæ dimenſio. Si enim utamur Inſtrumentis ordinariæ magnitudinis, facilè error aliquis in capiendis angulis, altitudinis præſertim, committitur. Error autem vel minimus in c te anguli valde parvi determinanda commiſſus, cauſat errorem in diſtantia.

Corollarium III.

145. QUin imò fieri poteſt, ut idem error, etiam minimus, in altitudinis angulo ſemper decreſcente, errorem in diſtantia cauſet quovis dato majorem.

Scholion.

NOtabis, *in hac Obſervatione expendi dumtaxat defectum anguli altitudinis, ortum ex ſitu vitioſo lateris mobilis* AO, *etiamſi infernum latus quadrantis, ſitum obtineat debitum, nempe horizonti parallelum; ex cujus defectu origo erroris altera declarabitur Obſerv. VIII. Vitiatur ſitus lateris mobilis* AO *ex mala collimatione in apicem altitudinis, & inæquali diviſione graduum, aliove Inſtrumenti vitio.*



OBSERVATIO II.

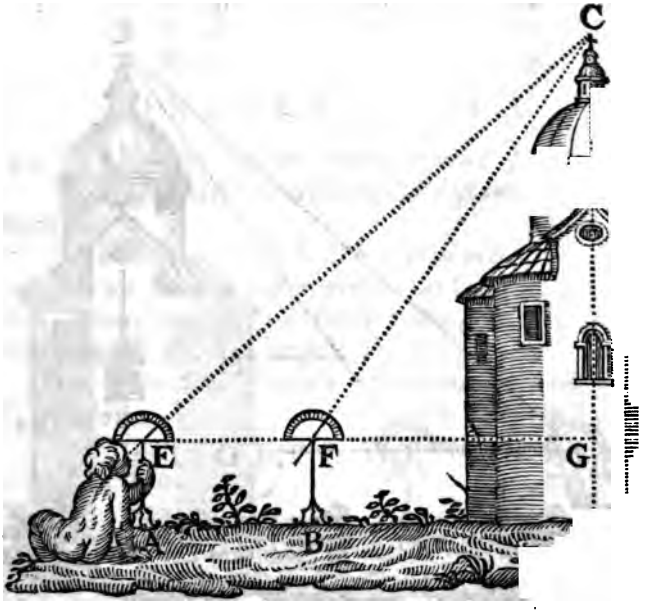
146. QUoties *duabus ſtationibus menſuranda eſt altitudo, aut diſtantia, tantum eſſe debet intervallum ſtationum, quantum ſatis eſt, ut differentia angulorum obtineatur.*

Nam

Nam in conſtructione Problematis IV. requiritur differentia aliqua tangentium; quæ ut obtineatur, opus eſt juſto ſtationum intervallo. Loca ſtationum ſint E & F: angulorum altitudinis in his ſtationibus, C F G, C E G differentia eſt angulus E C F; eſt enim angulus C F G par duobus C E F, E C F, ex Elementis. Angulus autem E C F, quò major fuerit, eò certior operatio erit; porro erit major, quò ſtationum E & F intervallum fuerit majus.

Corollarium.

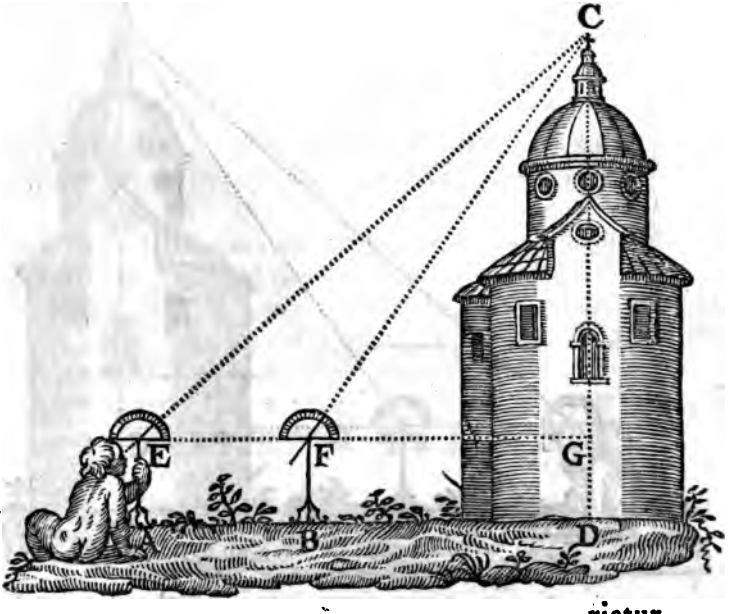
147. ERrant, qui putant, ſtationum intervallo quolibet ad libitum aſſumpto, ſenſibilem angulorum differentiam poſſe obtineri.



OBSERVATIO III.

148. *Dato quovis altitudinis angulo in ſtatione una, definire, quanto opus ſit ſtationum intervallo, ut acquiratur in ſtatione altera angulus altitudinis, differens gradu uno, aut pluribus.*

Quoniam differentia angularis ECF ſaltem unius gradus eſſe debet, ſtatuo altitudinis angulum CEG in ſtatione remotiore E eſſe 14 grad., & CFG in ſtatione proximiore F grad. 15. Ergo horum complementa ECG, FCG ſunt grad. 76 & 75, quorum tangentes ſunt EG, FG; & ex tabulis trigonometricis dantur 401078 & 373205, & tangentium differentia 27873, ipſum videlicet intervallum ſtationum EF; cujus proinde ratio ad diſtantiam majorem EG repe-



rietur,

rietur, ſi major tangens per tangentium differentiam dividatur.

Invenies igitur hac methodo, cùm in prima ſtatione habetur altitudinis angulus grad. 14, ut obtineatur in ſtatione ſecunda angulus uno gradu major, nempe grad. 15, oportere accedere per ſpatium EF, quod ferè ſit pars decima quarta totius diſtantiæ EG. Eodem modo inveſtigabitur ſub quovis altitudinis angulo in ſtatione una, quanto opus ſit intervallo, ut acquiratur in ſtatione altera angulus altitudinis, differens gradu uno, aut pluribus; ut in adjectis exemplis.

Anguli altitudinis, graduum	*requirunt intervallum ſtationum, quod ſit majoris diſtantiæ* EG *pars ferè*
19 & 20	18
14 & 15	14
10 & 11	10
5 & 4	4.

OBSERVATIO IV.

149. *DEfiniri pariter trigonometricè poteſt, quæ ſit proportio altitudinis ad diſtantiam ſub variis angulis.*

Nam in triangulo CGF, invento altitudinis angulo F, ex tabulis datur proportio laterum, nimirum, GF diſtantiæ, quæ eſt ſinus totus, & CG altitudinis, quæ eſt tangens anguli F. Itaque,

Dato altitudinis angulo F, *graduum*	*erit altitudo* CG *pars diſtantiæ* GF *ferè, omiſſis fractionibus,*
20	2
13	3
10	5
5	11
3	19
1	57

Scholion.

HÆc *intellige, ſi diſtantia non ſit tanta, ut propter rotunditatem terræ ſenſibiliter curva evadat; quod eveniet, ſi diſtantia gradum unum adæquet ambitus terreni; ut infra planum faciam.*

OBSERVATIO V.

150. NOn *tutò ex qualibet diſtantia altitudines menſurantur.*

Perinde obſunt & magna diſtantia, & vicinitas magna: diſtantia quidem, quia facit, ut ſub exiguo angulo ſpectetur altitudo, ac proinde in capiendo angulo facilè committatur error, juxta Obſervationem I. Magna vicinitas obeſt, quia efficit, ut angulus, ſub quo altitudo conſpicitur, vix differat a recto, ac proinde alter angulus ſit acutus inſenſibilis; unde facilè accidet, ut altitudo colligatur major verà.

OBSERVATIO VI.

151. EX *omni ea diſtantia ſatis tutò altitudo menſurabitur, ad quam ipſa proportionem habeat ſenſibilem.*

Ita enim & incommoda jam dicta licebit effugere, & faciliùs angulorum ſenſibilis differentia, ſtationibus variatis, obtinebitur. Niſi forte diſtantia eſſet tanta, ut rotunditas terræ, altitudinis dimenſioni officiat; ut mox obſervabitur.

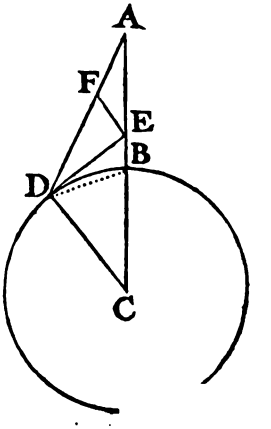
OBSERVATIO VII.

152. QUantum *rotunditas terræ erroris invehat in altitudinum menſuram.*

Su-

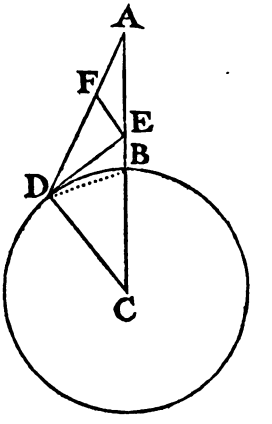
Superiora Problemata ita reſolvimus, ut nullam rotunditatis terræ rationem habuerimus. Cùm enim altitudines, quarum, ut plurimùm, menſuram inquirimus, ſint mediocres, earum menſurationi nihil officit telluris figura ſphærica. Quia tamen in montium altitudine determinandà convexitas terræ aliquid poteſt influere, uno aut altero exemplo rem totam expedio.

Altitudo montis unius milliaris eſto AB, quæ protracta tranſeat per C terræ centrum, cujus diameter contineat 3600 milliaria: oculus menſoris ſit in puncto D, ex quo ſpectetur apex montis A; ſitque circumferentia BD trium milliarium, quamvis amplius intervallum in figura fuerit deſignatum, commoditatis gratiâ; tum aſſumatur, ut moris eſt, linea horizontalis DE reſpectu puncti D; hoc eſt, ſit angulus CDE rectus, & conſequenter angulus DEC acutus, nempe grad. $89^{\circ}\ 57'$, & angulus DEA grad. $90^{\circ}\ 3'$; qui tamen conſideretur ab imperito quaſi rectus; ducaturque FE parallela lineæ DC; hoc eſt, ſit angulus DEF rectus.



His poſitis, triangulum rectangulum, quod hactenus in praxi trigonometrica conſideravimus, non eſt ABD, ſed DEF. Praxis autem trigonometrica docet, qua ratione metiri poſſimus lineam FE, quæ minor eſt lineâ AE, cùm angulus AFE ſit obtuſus. Ergo linea, ſeu altitudo FE multò minor erit, quàm AB, vera montis altitudo. Quæritur jam quantum deficiat. Ac primò, facilè per calculum trigonome-

tricum eliciemus valorem lineæ B E. Conſideretur triangulum rectangulum C D E, in quo latus C E eſt ſecans anguli D C E trium minutorum; eritque 10000004, qualium radius ponitur eſſe 10000000; & conſequenter B E erit earumdem partium 4. Pono rurſum, ſemidiametrum terræ continere milliaria 3600, ſeu paſſus 3600000, hoc eſt, pedes 18000000. Fiat ergo: *Ut ſinus totus* 10000000 *ad pedes* 18000000, *ita* 4 *ad pedes* $7\frac{1}{5}$. Erit ergo B E pedum $7\frac{1}{5}$. Simili methodo invenietur trigonometricè, quantùm altitudo inventa F E deficiat ab A E. Quare altitudo montis A B minor adhuc invenietur pedibus $7\frac{1}{5}$.



Si arcus D B eſſet unius gradus, longè major error committeretur, hoc eſt, pedum 2663, poſita ſemidiametro terræ milliarium 3600.

Quomodo montis alicujus altitudo ſit exactè inquirenda, infra docebimus, ubi etiam ſemidiametrum terræ accuratiùs determinabimus.

OBSERVATIO VIII.

153. *Quamvis rotunditas terræ multum detrahat altitudini menſurandæ, eadem tamen nihil ferè officit menſurationi diſtantiæ.*

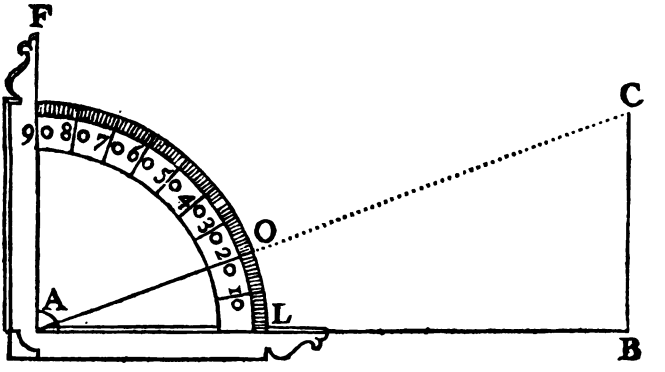
Diſtantia D B menſoris a monte ponatur eſſe unius gradus terreni ambitus, hoc eſt, ut demonſtrat P. Tacquet in Geom. pract. Probl. IV. Cap. VI., 24 millia-

liarium Belgicorum. Linea diſtantiæ, cujus quantitas inquiri poteſt, eſt, non arcus DB, ſed DE, tangens ſuperficiem terræ. Ducatur ſubtenſa DB: tangens DE unius gradus, excedit DB ſubtenſam unius gradus, ne parte quidem milleſima; quare diſtantia DE inſenſibiliter excedit ſubtenſam DB, multòque magis arcum DB. Hinc rotunditas terræ, quæ in unius gradus intervallo tantum detraheret altitudini menſurandæ, hæc eadem nihil quidem erroris ullo modo perceptibilis derivaret in diſtantiam 24 milliarium.

OBSERVATIO IX.

154. *PRæcipuus, & frequentior error, quo altitudinum dimenſio vitiatur, ex defectu perpendiculi.*

Quoties altitudines metimur, ſemper infernum latus AB anguli CAB, qui per quadrantem, aut ſemicirculum invenitur, eſſe debet horizonti parallelum; alioquin non haberetur trigonum rectangulum ABC.



Id

Id verò obtinetur ope perpendiculi. Nam in quadrante, ope perpendiculi, ſtatuitur ſupernum Inſtrumenti latus perpendiculare horizonti; & in ſemicirculo ſtatuitur perpendicularis horizonti ſemidiameter dividens ſemicirculum in duos quadrantes; unde conſequens eſt, ut latus alterum quadrantis, ipſum nempe anguli latus infernum, ſit horizonti parallelum.

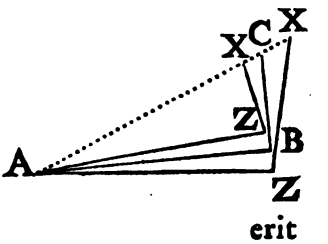
Collocatio itaque perpendicularis unius lateris Inſtrumenti ſedulò examinanda eſt; deviatio quippe inſenſibilis a perpendiculo, errorem infert in dimenſione ſenſibilem. Quare cautio adhibenda duplex: Prima eſt, ut perpendiculo ita planum quadrantis applicetur, ut tamen illius libertatem contactu ſuo non impediat; Secunda, ut perpendiculum quieſcat; hinc ejus motum leni attactu elidere oportet, ſi nimis diu titubet.

OBSERVATIO X.

155. *Definiri poteſt quantitas erroris ex defectu perpendiculi in altitudinis menſuram derivata.*

Pone latus inferius anguli altitudinis per Inſtrumentum inventi, non eſſe horizonti parallelum, ac proinde cum altitudine menſuranda BC angulum rectum non efficere, ſed cadere infra, vel ſupra parallelam horizonti AB, utì cadunt rectæ AZ, AZ. Quantitas erroris in altitudinis BC menſuram ex hoc defectu derivata, ita decerni poterit.

Eſto menſoris oculus in A: altitudo vera BC: radius AC ab oculo per altitudinis apicem C: diſtantia data AB, ac proinde etiam AZ 1000 pedum. Ex puncto Z concipiatur erecta ZX perpendicularis ad AZ; cui occurrat radius AC in X:



erit

erit ZX altitudo falſa; cujus quantitas ex hoc ſitu vitioſo innoteſcet loco veræ BC. Ponamus inſuper angulum ZAB, quo deflectit AZ a parallelo ſitu AB, eſſe 30 minutorum; ipſum verò altitudinis angulum Inſtrumento repertum CAZ grad. 10.

His ita conſtitutis, cadat primò AZ infra AB. Quoniam CAZ eſt grad. 10, & ZAB 30 minut., erit CAB grad. 9. 30; cum quo, & latere AB 1000 pedum in triangulo rectangulo ABC, reperietur *altitudo vera* BC pedum 167. 3. 4, hoc eſt, cum tribus decimis, & quatuor centeſimis. Jam in trigono rectangulo AZX, quia dantur rurſum latus AZ 1000 pedum, & angulus XAZ grad. 10, reperietur *altitudo falſa* ZX pedum 176. 3. 2. Erroris ergo quantitas eſt ferme pedum 8. 9. 8.

Quod ſi AZ cadat ſupra AB, eodem ratiocinio ſimiliter reperietur erroris quantitas pedum 9. 0. 1.

Corollarium I.

156. HInc, poſito licet adeo notabili perpendiculi defectu, in caſu primo error non æquat decimam octavam partem altitudinis, in ſecundo ne vigeſimam quidem.

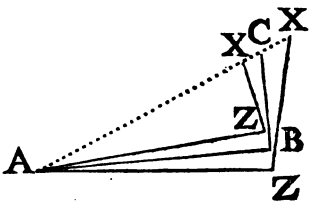
Corollarium II.

157. QUare, cùm menſoris ab altitudine diſtantia ea eſt, quæ altitudinis angulum quantitatis juſtæ exhibeat, puta, non minorem 10 gradibus, error quoque dimenſionis ex defect di-culi non erit magnus. Nam & defectum li

ſatis craſſum aſſumpſimus, minutorum nempe 30, qualem non facilè accuratus menſor committeret, & diſtantiam eam, quæ angulum ſatis efficeret parvum, videlicet 10 graduum.

Corollarium III.

158. SUb angulo majore, cæteris paribus, error adhuc multò inſenſibilior evadet. Nam reliquis datis iiſdem, ſi angulus altitudinis XAZ fuerit 45 graduum, eodem diſcurſu reperies errorem non æquare quinquageſimam ſextam partem altitudinis veræ AB, cadente AZ infra parallelam AB; cadente autem ſupra, ne partem quidem quinquageſimam octavam.



Corollarium IV.

159. HInc veriſſimè monet P. Tacquet in Geom. pract., perſpicuum eſſe, ſi cautè, & accuratè operemur, poſſe altitudines montium, ſecus ac nonnullis imperitis aliquando viſum eſt, abſque errore notabili, etiam mediocri adhibito Inſtrumento, reperire; quod ipſum etiam ex ſequenti Obſervatione confirmabitur.

OB-

OBSERVATIO XI.

160. *DAtis omnibus iiſdem, quæ ſupra, ſub angulo altitudinis vel nimis parvo, vel valde magno, major evadet, ac ſenſibilior error, qui oritur ex defectu perpendiculi.*

Eſto altitudinis angulus grad. 5. Eodem diſcurſu reperietur error major nona, ſed minor octava altitudinis parte, quando AZ cadit infra parallelam horizonti AB. Cùm verò AZ cadit ſupra AB, error proveniet major undecima parte altitudinis, ſed minor decima; qui error, cùm ne ipſe quidem adeo ſit enormis, præſertim ſub angulo altitudinis tam exili, videlicet grad. 5, & perpendiculi defectu tam craſſo, minutorum 30, confirmat amplius ea, quæ paulo ante dicta ſunt.

Ulteriùs autem decreſcente altitudinis angulo, prædictus error fiet intolerandus. Nam, reliquis datis, ſi altitudinis angulus ſit grad. 3, & AZ cadat infra AB, proveniet error quinta parte altitudinis major. Rurſum, ſi angulus altitudinis ſit 2 grad., & AZ cadat etiam infra AB, error tertiam excedet altitudinis partem.

Pari ratione gravis evadet error, cùm diſtantia menſoris tam exigua erit, ut angulus altitudinis proveniat valde magnus, hoc eſt, proximè accedens ad rectum. Nam, datis iiſdem, quæ ſupra, ſi altitudinis angulus fuerit grad. 88, error tertiam partem altitudinis excedet.

Corollarium.

161. EX hactenus dictis etiam confirmantur ea, quæ Obſer. VI. demonſtrata ſunt; tutiſſimam nempe altitudinis dimenſionem inſtitui ex diſtantia mediocri, quæ exhibeat altitudinis angulum quàm proximè grad. 45.

Scholion.

SUnt & alia obſervanda circa refractiones, quæ notabiliter variant altitudinis, vel diſtantiæ angulum, præſertim in dimetiendis diſtantiis ſyderum, planetarum, vel majorum montium altitudine capienda. Sed de his infra.

TRI-

TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
PARS TERTIA.

LECTORI.

QUamvis univerſæ Matheſi ingens olim attuliſſet adjumentum, primò characterum indicorum, deinde fractionum decimalium introductio; non minor tamen ad res mathematicas acceſſio facta eſt, ex quo Neperus ſuperiore ſæculo mirificum illud logarithmorum inventum excogitavit, & perfecit; quorum quidem uſus, quàm latè pateat per omnes mathematicas diſciplinas, nemo eſt in iis ſtudiis mediocriter verſatus, qui ignoret.

Ac primò, omnis ferè ſolutio, ſive analyſis trianguli, ope canonis ſubtenſarum, ſinuum, tangentium, & ſecantium abſolvebatur per regulam proportionum, utì hactenus a nobis factitatum eſt. Numeri autem, qui inveniuntur in tabulis ſinuum, ut vitentur fractiones, eamque habeant accuratam diligentiam, quæ requiritur, ſeptem, aut octo characteribus conſtant. Ex quo fit, ut operationes trigonometricæ multum laboris, tædii, immo & periculi habeant, ne in tam longis operationibus aliquid erroris irrepat. Unus omnium doctiſſimus Neperus, ac de univerſa Matheſi bene meritus, alios numeros pro ſinubus, tangentibus, & ſecantibus ſubſtituit; quorum ope idem ſola additione præſtamus, quod multiplicatione; idemque ſubtractione, quod olim diviſione efficiebamus; numeroſque ferè immenſos, qui vix tractari, ſubigique in calculo poſſent, facili compendio in ordinem coegit per logarithmos; & eorum canonem deſcripſit, conſtruxit, & edidit Edimburgi, anno 1614.; quem ſtatim omnes Mathematici, utilitate permoti, avidè arripuerunt.

Paucis poſt annis, quàm hæc ediderat N[illegible]s, aliam ſubinde magis commodam logarithm

mam excogitavit, quam Henrico Briggio ſtatim aperuit, Geometriæ in Academia Oxonienſi Profeſſori; eumdemque ſibi ſocium operis, adjutoremque habuit, ut logarithmos in meliorem formam redactos compleret. Sed Nepero demortuo, totum, quod reſtabat, onus in Briggium devolutum eſt, qui magno labore, & ſumma, qua pollebat, ingenii ſubtilitate, canonem logarithmicum ex nova illa forma compoſuit pro numeris naturalibus ab 1 uſque ad 20000, & a 90000 ad 100000; ac methodum conſtruendi canonem unà expoſuit in ſua Arithmetica logarithmica, Londini edita anno 1624.

Paulo poſt eumdem canonem iteratò edidit Goudæ apud Batavos anno 1628 Adrianus Vlaccus; & lacunam inter 20000 & 90000 mox explevit, ut docuerat Briggius.

Denique poſt mortem Briggii has ipſas tabulas cum tractatu de tabularum conſtructione, & uſu, ſub nomine Trigonometriæ Britannicæ, edidit Henricus Gelibrand Londini, anno 1633.

Ita brevi & inventa, & perfecta eſt ſcientia logarithmorum, cui illuſtrandæ non defuerunt noſtro, & ſuperiore ſæculo Viri in re mathematica exercitatiſſimi. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctiſſimè illi quidem, ſed Magiſtris ſolùm ſcripſere; alii, ut Tironibus ſervirent, certas quaſdam, magiſque obvias logarithmorum proprietates ſelegerunt; intimam eorum naturam non aperuerunt.

Horum ego quidem neminem reprehendo. Habet quiſque in ſcribendo certum, & deſtinatum ſcopum, quo tendat, & arcum dirigat magna cum laude, & ſcientiarum incremento. Mihi quidem propoſitum eſt Neperum, Briggium, Vlachium, alioſque ſequi in hoc tractatu, non ut Interpretes facere ſolent, ſed, ut in reliquis Elementis, e fontibus eorum, judicio, arbitrio-

trioque noſtro, quantùm quoquomodo videbitur, haurire; & logarithmorum ſcientiam, iis etiam, qui non ultra Arithmeticæ ſpecioſæ, & Geometriæ elementa proceſſerint, penitus aperire; & quod caput artis in docendo eſt, ſi modò id conſequi potero, hujus ſcientiæ myſteria ita explanare, ut Magiſtri nihil habeant, quod deſiderent; Tironibus nihil occurrat, quod eos offendat, aut impediat. Quod ſi in alterutro peccandum ſit, malim facilitandæ hujus ſcientiæ ſtudioſus, quàm geometricæ brevitatis cupidus videri.

TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
PARS TERTIA.

De Canone Logarithmico.

DEFINITIO UNICA.

162. LOGARITHMI *ſunt numeri arithmeticè proportionales, adjuncti, aut reſpondentes numeris geometricè proportionalibus.*

Vel, *ſunt numeri, qui arithmeticam, ubi ii, quorum ſunt logarithmi, geometricam ſervant proportionem.*

Exemplo ſit ſeries quæcunque numerorum geometricè proportionalium, ut A, cui e regione reſpondeat alia ſeries B numerorum quorumlibet arithmeticè proportionalium, nempe æquidifferentium, ſive creſcen-

A 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.
B 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.

do, ſive decreſcendo. Hi numeri B, dicuntur *logarithmi* numerorum A; qui logarithmi poſſunt eſſe quicunque numeri ad libitum aſſumpti, dummodo æquali ſemper exceſſu ſe ſuperent creſcendo, vel æquali defectu ſemper decreſcant.

163. Ut autem vel in ipſo limine percipias finem, propter quem inventi ſunt hujuſmodi logarithmi, finge me velle, datis tribus numeris, quærere quartum proportionalem. Sint dati tres numeri ſeriei A, 2, 4, 8, quibus quæritur quartus proportionalis. Regula conſueta jubet multiplicari 8 per 4, & productum 32 dividi per primum 2; quotiens ſcilicet 16 eſt ille, qui quæritur. Nos aliter operabimur per logarithmos: ſi trium numerorum geometricè proportionalium 2, 4, 8, logarithmis in prima ſerie acceptis, 2, 3, 4, addamus duos ultimos 3 & 4=7, & ab hoc numero 7 auferatur primus, nempe 2, reſiduum erit 5: Dico hunc numerum 5 eſſe logarithmum numeri quæſiti; ac proinde, ſi tabulam conſulas, videaſque numerum geometricum in ſerie A reſpondentem numero 5 ſeriei ſequentis B, invenies pariter 16.

Ad hunc itaque finem inventi ſunt logarithmi, *ut per ipſos regula trium longè facilius abſolveretur*, quàm vulgò fieri conſuevit; nempe mutata multiplicatione in additionem, & diviſione in ſubtractionem, ut videbimus. Ex hac propterea inſigni logarithmorum proprietate eoſdem deſcripſerunt nonnulli hoc modo. *Logarithmi ſunt numeri artificiales, ſubſtituti pro*

A 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.
B 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.
B 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c.
B 48, 45, 42, 39, 36, 33, 30 &c.
B 0, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 4, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, 8 &c.

natu-

naturalibus, apti ad ſolvendam multiplicationem ſola additione, & diviſionem ſola ſubtractione.

Scholion.

SUpputationes arithmeticæ, quæ olim in tabulis ſinuum propter magnitudinem numerorum, qui invicem multiplicandi eſſent, ac dividendi, uſque adeo operoſæ fuerant, & tædii plenæ, ac proinde errandi periculo obnoxiæ, hoc admirabili invento logarithmorum uſque adeo faciles, & breves evaſerunt, ut, quod per antiquas analogias vix intra unum diem obtineri poterat, abſolvi jam commodè poſſit horæ unius ſpatio, ope logarithmorum, de quibus tractare aggredimur.

164. Progreſſio quævis geometrica non hanc potiùs, quàm illam logarithmorum ſeriem ſibi vindicat; *ſed liberum eſt cuique, logarithmorum ſeriem, quam voluerit, adhibere.* Determinatis tamen logarithmis duorum numerorum, jam amplius liberum non eſt quoſcunque logarithmos aſſignare cæteris numeris geometricè proportionalibus; puta, ſi logarithmus unitatis ſit 1, & binarii ſit 2, ut in tabula præcedenti, neceſſariò logarithmus quaternarii erit 3, & octonarii erit 4; & ita de cæteris ſeriebus arithmeticis, quæ applicari poſſunt eidem progreſſioni geometricæ.

165. Tametſi logarithmorum ſpecies poſſit ad libitum aſſumi, ut diximus, nihilominus *præſtantiſſima, ac commodiſſima eſt illa, quæ cipbram* o *ponit pro logarithmo unitatis*, propter rationes inferiùs tradendas; ut in hoc exemplo.

A	1,	2,	4,	8,	16,	32	&c.
B	0,	1,	2,	3,	4,	5	&c.
B	0,	$1\frac{1}{3}$,	$2\frac{2}{3}$,	4,	$5\frac{1}{3}$,	$6\frac{2}{3}$	&c.

166. Qui tabulas condiderunt, progreſſionem decuplam, 1, 10, 100, 1000 &c. pro geometrica aſſumpſere, numeroſque, qui maximo exceſſu 10000000 ſe ſuperarent, pro arithmetica progreſſione; ac conditionem, quam nuper indicavimus, obſervarunt; qua fieret, ut geometricam ordirentur ab 1, & arithmeticam a 0, propter uſus infra tradendos.

Progr. geom.	*Progr. arithm.*
1	0
10	10000000
100	20000000
1000	30000000
10000	40000000 &c.

167. Quid autem cauſæ fuerit, cur logarithmorum Inventores pro terminis progreſſionis arithmeticæ aſſumpſerint numeros tanto exceſſu ſe ſuperantes, breviter indicabo; quod planiùs infra exponam. Nam, ſi in hoc opere, uſuque logarithmorum nihil aliud præſtari oporteret, quàm datæ cuilibet ſeriei numerorum geometricè proportionalium 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c. aſſignare ſeriem numerorum arithmeticè proportionalium, ſeu logarithmos 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., facillimum id quidem eſſet, nec magni moliminis opus. Quia verò in quacunque ſerie geometrica multi deſunt numeri intermedii, quibus in noſtris operationibus indigere poſſumus; ideo logarithmi applicati cuicumque ſeriei geometricæ, debent maximo exceſſu ſe invicem ſuperare, *ut intermediis poſſint etiam ſui logarithmi, ſine ulla fractione aſſignari*. Quod, ut faciliùs intelligas, confer jam dictam ſeriem arithmeticam 1, 2, 3, 4 &c. cum ſerie geometrica 1, 2, 4, 8 &c. Cùm unitas ſit logarithmus unitatis, binarius binarii, ternarius quaternarii, hìc jam deeſſet logarithmus ternarii; pariter nullus inveniretur logarithmus numerorum 5, 6, 7, 9, 10, 11 &c.; in quo eſſet maximus defectus in canone logarithmico; nam quotieſcunque occurrerent numeri hujuſmodi, ceſſaret omnis logarithmorum uſus.

Ex

Ex quo fit, ut, ſi logarithmus unitatis eſſet 0, pro logarithmo binarii poſſent accipi 10000000, pro logarithmo quaternarii 20000000, pro logarithmo octonarii 30000000; & tunc poſſent ſuppetere complures logarithmi *pro numeris intermediis*, etiam ſine fractionibus; utì mox exponam.

Verùm, antequam logarithmorum ſpeciem aliquam, uſumque referam, quem obtinent in Trigonometria, neceſſarium duco proprietates omnibus logarithmis communes explicare.

De Logarithmorum proprietatibus, & inventione.

LEMMA I.

168. *SI fuerint quatuor numeri arithmeticè (ſive continuè, ſive non continuè proportionales), ſumma extremorum æquabitur ſummæ mediorum. Et contra.*

Ut quoniam numeri 9, 15, 21, 27 ſunt arithmeticè proportionales, tam ſumma extremorum 9 & 27, quàm mediorum 15 & 21, eſt 36. Rurſus in numeris 5, 6, 3, 4, extremorum ſumma eſt 9, æqualis ſummæ mediorum pariter 9.

LEMMA II.

169. *SI fuerint tres numeri arithmeticè proportionales, ſumma extremorum æquabitur duplo medii. Et contra.*

Patet in numeris 4, 6, 8. Summa enim extremorum eſt 12, quantum eſt duplum medii. Item in numeris 17, 26, 35, in quibus tam medium duplicatum, quàm extremi ſimul additi, efficiunt 52. Converſum quoque horum Lemmatum perſpicuum eſt.

Utrumque Lemma demonſtratur Tom. III. A

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

170. *SI quatuor numeri* A, B, C, D *ſint geometricè proportionales, ſumma ex logarithmis* E, H *extremorum* A, D, *æquabitur ſummæ ex logarithmis* F, G *mediorum* B, C. *Et contra.*

Demonſtratio. Nam, cùm numeris geometricè proportionalibus ſemper reſpondeant numeri arithmeticè proportionales, ut ex logarithmorum definitione patet, erunt hac de cauſa logarithmi E, F, G, H arithmeticè proportionales; ac proinde per Lem. I. ſumma extremorum E, H æquabitur ſummæ mediorum F, G.

Quòd ſi ſumma extremorum E, H ſit æqualis ſummæ mediorum F, G, oſtendetur eadem ratione numeros A, B, C, D eſſe geometricè proportionales. Erunt enim per idem Lem. I. logarithmi E, F, G, H arithmeticè proportionales, & per logarithmorum definitionem, numeri A, B, C, D proportionales geometricè. Quod eſt propoſitum.

Corollarium.

171. *ITaque, quatuor numerorum geometricè proportionalium* A, B, C, D *datis tribus, quartum licebit reperire.* Si enim quartus quæſitus ſit D, unus extremorum, a ſumma ex logarithmis F, G medio-

	1	0000		1	0
A	10	1000 E	A	2	1 E
				4	2
B	100	2000 F	B	8	3 F
	1000	3000	C	16	4 G
				32	5
C	10000	4000 G			
D	100000	5000 H	D	64	6 H

rum

rum B, C, dempto logarithmo E alterius extremi A, remanebit logarithmus H numeri quæſiti D. Si autem quæratur C, unus mediorum, a ſumma ex logarithmis E, H extremorum A, D, auferatur logarithmus F medii dati B; & relinquetur logarithmus G medii quæſiti.

Scholion.

172. *QUamvis numeri* E, F, G, H *non ſint arithmeticè continuè proportionales, ſive æquidifferentes, nihilominus ſunt logarithmi numerorum geometricè proportionalium* A, B, C, D, *juxta præmiſſam definitionem, quæ præcisè id requirit, ut logarithmi ſint numeri arithmeticè, ſive continuè, ſive non continuè, proportionales, adjuncti, aut reſpondentes numeris geometricè, ſive continuè, ſive non continuè, proportionalibus.*

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

173. *SI ſint tres numeri* A, B, C *geometricè proportionales, ſumma ex logarithmis* D, F *extremorum* A, C, *æquabitur duplo logarithmi* E *medii* B. *Et contra.*

Demonſtratio. Quoniam A, B, C ſunt geometricè proportionales, erunt D, E, F arithmeticè proportionales ex logarithmorum definitione. Ergo ex Lem. II. ſumma logarithmorum D, F æquabitur duplo logarithmi E.

Si verò ſumma logarithmorum D, F æqualis fuerit duplo logarithmi E, erunt rurſus D, E, F arith-

	1	00000
	10	10000
A	100	20000 D
B	1000	30000 E
C	10000	4C
	100000	5

meticè proportionales ex eodem Lem.; & ex logarithmorum definitione, numeri A, B, C erunt geometricè proportionales. Patet ergo propoſitum.

Corollarium.

174. HInc *e tribus numeris proportionalibus* A, B, C *datis duobus, tertius invenietur.* Si hic tertius ſit C, extremorum unus, a logarithmo duplicato E medii B, ſubtrahatur logarithmus D extremi dati; & habebitur logarithmus F tertii quæſiti. Sin autem quæratur medius B, ſumma logarithmorum D, F extremorum biſecta dabit logarithmum E numeri quæſiti.

	1	00000
	10	10000
A	100	20000 D
B	1000	30000 E
C	10000	40000 F
	100000	50000

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

175. CUm *unitatis logarithmus eſt* 0, *ſumma ex logarithmis* D, E *numerorum* A, B, *multiplicandi, & multiplicantis, æquatur logarithmo* F *producti* C.

Demonſtratio. Cùm enim in omni multiplicatione unitas ad numerum multiplicantem ſit ſemper in eadem ratione, quam habet multiplicandus ad productum;

	1	0000
A	10	1000 D
G	100	2000 H
B	1000	3000 E
C	10000	4000 F
	100000	5000
M	1000000	6000 N

	1	0
A	2	1 D
G	4	2 H
B	8	3 E
C	16	4 F
	32	5
M	64	6 N

erunt

erunt unitas, & numeri A, B, C geometricè proportionales; & eorum logarithmi erunt æquidifferentes, per def.; ac propterea, per Lem. I., ſumma logarithmorum D, E æquabitur ſummæ logarithmorum F, & unitatis. Eſt autem logarithmus unitatis o; erit igitur ſumma logarithmorum D, E ſoli logarithmo F æqualis, numeri nempe producti. Quod eſt propoſitum.

Scholion.

SI unitatis logarithmus eſſet aliquis numerus, a ſumma logarithmorum D, E *auferri deberet logarithmus ipſius unitatis, ut habeatur logarithmus* F *producti. Cùm autem ponatur* o, *ſublevamur in calculis ab hac ſubtractione; ideoque multiplicatio inſtituitur ſola logarithmorum additione; atque hæc eſt ratio, cur logarithmus unitatis ſtatuatur* o.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

176. *SI unitatis logarithmus ſit* o, *logarithmus* D *cujuſcunque numeri* A, *duplicatus facit logarithmum* H *quadrati* G; *triplicatus facit* E *logarithmum cubi* B *ejuſdem numeri* A.

Demonſtratio ſequitur ex præced. Cùm enim duplicatio logarithmi D idem ſit, ac additio, ex qua fit logarithmus H numeri G; erit ipſe numerus G factus ex multiplicatione ejuſdem numeri A in ſe; ſic enim ſumma logarithmorum multiplicandi, & multiplicantis æquatur logarithmo producti, per præced. Eſt ergo G quadratum ejuſdem A. Quod eſt primum.

Jam verò logarithmus H cùm duplus ſit logarithmi D, ex hypotheſi, erunt logarithmi D & [illegible]ul, tripli ſolius logarithmi D. Eſt autem ejuſ

plus etiam logarithmus E (ponitur enim ex logarithmo D triplicato fieri E); ac proinde logarithmus E æquatur duobus D, H ſimul; Quare numerus B producitur ex A in G, ut patet per præced., hoc eſt, ex radice in quadratum; ac propterea ejuſdem A cubus eſt. Quod erat alterum.

Corollarium.

177. HInc ex logarithmo alicujus numeri quadruplicato fiet logarithmus biquadrati, ſeu quartæ poteſtatis ejuſdem numeri; ex eodem quintuplicato fiet logarithmus quadrato-cubi, ſeu quartæ poteſtatis ipſius numeri; & ita, ſi ducatur per 6, 7, 8 &c., ſemper producetur logarithmus illius dignitatis algebricæ, per cujus exponentem multiplicatus fuit logarithmus propoſiti numeri. Verùm hæc attigiſſe ſufficiat inpræſens.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

178. *POſito unitatis logarithmo cipbra, ſeu* 0, *logarithmus* F *numeri dividendi* C, *æquatur logarithmis* E *&* D *ſimul, diviſoris* B, *&* *quotientis* A.

Demonſtratio. Cùm enim eadem ſit ratio unitatis

	1	0000		1	0
A	10	1000 D	A	2	1 D
G	100	2000 H	G	4	2 H
B	1000	3000 E	B	8	3 E
C	10000	4000 F	C	16	4 F
	100000	5000		32	5
M	1000000	6000 N	M	64	6 N

ad

ad quotientem A, quæ diviſoris B ad dividendum C, ut patet ex def. diviſionis; erunt unitas, & numeri A, B, C geometricè proportionales, & logarithmi unitatis & D, E, F proportionales arithmeticè ex def. Quare ex Lem. I. ſumma logarithmorum unitatis & F, hoc eſt, ſolus logarithmus F, æquabitur logarithmis E & D ſimul ſumptis. Quod &c.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

179. *EXiſtente unitatis logarithmo cipbra, ſi cujuſpiam numeri* M *logarithmus* N *biſecetur, hoc eſt, ejuſdem ſumatur dimidium, proveniet* E, *logarithmus quadratæ radicis* B; *ſi capiatur tertia pars, habebitur* H, *logarithmus radicis cubicæ* G *ejuſdem numeri* M.

Demonſtratio. Quoniam logarithmus E duplicatus facit N, per hyp., erit (*n.* 176.) M quadratus numerus ipſius B, hoc eſt, B radix quadrata numeri M. Similiter, cùm logarithmus H ſit tertia pars logarithmi N, ex hypotheſi idem H triplicatus faciet N; ac proinde numerus M cubus erit ipſius G, ſive G cubica radix numeri M. Quod &c.

Corollarium I.

180. HInc, ſi cujuslibet numeri logarithmus dividatur per 4, 5, 6 &c., fiet logarithmus radicis ejuſdem numeri, denominatæ ab ea poteſtate cujus exponens pro diviſore ſumptus fuerit.

Corollarium II.

181. EX ſuperioribus Propoſitionibus totus pendet logarithmorum uſus in operationibus arithmeticis.

Multiplicatio. Si duo numeri vulgares multiplicandi ſint inter ſe, eorum logarithmi ſimul additi, dabunt logarithmum producti (*n.* 175.).

Diviſio. Si numerus aliquis per alium numerum dividendus ſit, ex logarithmo dividendi dempto diviſoris logarithmo, relinquetur logarithmus quotientis (*n.* 178.).

Formatio poteſtatum. Si numerus quilibet in ſe quadratè, vel cubicè ducendus ſit, ejus logarithmus duplicatus, vel triplicatus gignet logarithmum quadrati, vel cubi (*n.* 176.).

Extractio radicum. Si numeri cujuſpiam quæratur radix quadrata, vel cubica, dimidium, vel tertia pars logarithmi ejuſdem numeri, erit logarithmus radicis quæſitæ (*n.* 179.).

Scholion.

PRæcedentes operationes omnibus logarithmis ſunt communes. Jam ad conſtructionem canonis logarithmici veniamus.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Problema.

182. *Scopum canonis logarithmici aperire.*

Reſol. I. Logarithmorum calculus ad uſus Trigonometriæ, & ſinuum inveniendorum minimè eſſet accommodatus, ſi nihil aliud quæreret, quàm logarithmos eorum dumtaxat numerorum, qui forent in aliqua ex dictis progreſſionibus geometricis. Latiùs ad interjectos numeros extendatur oportet; ut in hiſce etiam eædem operationes arithmeticæ, pari facilitate, ac brevitate exerceri poſſint.

II. Quia verò fas unicuique eſt progreſſionem quamlibet pro arbitrio ſeligere; hinc factum eſt, ut Auctores, qui tabulas condiderunt, progreſſionem decuplam 1, 10, 100 &c. aſſumpſerint pro geometrica, ac numeros, qui ſe ſe invicem ſuperent eodem ſemper exceſſu 10000000, pro arithmetica; commodiorem verò illam logarithmorum ſpeciem invexerint, quæ ciphram ponit pro logarithmo unitatis, & unitatem cum aliquibus ciphris pro logarithmo denarii, eo conſilio, ut, quos obſervavimus uſus n. 14, 15, 16, in operationibus multiplicationis, & diviſionis, derivari facilè poſſent in hujuſmodi canonem logarithmicum.

Progr. geom.	*Progr. arith.*
1	0.0000000
10	1.0000000
100	2.0000000
1000	3.0000000
10000	4.0000000
100000	5.0000000
1000000	6.0000000

III. Denarii logarithmus *varius ponitur Auctoribus; prout etiam varius ſtatuitur ſinuum radius.* Cùm enim logarithmi referantur ad ſinum, tangentium &c., ut ex

bit, tantus debet esse denarii logarithmus, quantus ipse radius. Quare logarithmus denarii mihi erit 1.0000000; ut etiam communiter ab aliis assumitur.

IV. Logarithmi unitatis, & denarii dicuntur logarithmi *radicales*, quoniam sunt cæterorum logarithmorum radices; his enim statutis, reliquorum proportionalium logarithmi habentur per æquale incrementum; ac propterea non potest amplius mutari logarithmorum series; augentur namque logarithmi, sicuti crescunt in proportionalibus ipsæ proportiones. Quare, cùm proportio 100 ad 1 duplicata sit proportionis 10 ad 1; & proportio 1000 ad 1 triplicata sit ejusdem proportionis 10 ad 1 &c.; logarithmus centenarii duplus esse debet logarithmi denarii, nempe, 2.0000000, & logarithmus millenarii, triplus, hoc est, 3.0000000 &c.

V. Prima logarithmorum figura puncto solet separari a reliquis figuris, & vocatur *Characteristica*, sive *Indicativa*; quippe quæ indicat, quot figuris post primam constet numerus integer absolutus, cujus est logarithmus. Quamobrem logarithmi numerorum ab 1 ad 10 exclusivè, characteristicam habent 0; a 10 ad 100 exclusivè, habent 1; a 100 ad 1000 exclusivè, habent 2; & ita deinceps; quippe *characteristica semper unitate minor est numero figurarum numeri absoluti, cui logarithmus respondet*; ut proinde, dato quovis numero absoluto, puta, 62075, quinque figurarum, statim sciatur, ejus logarithmo deberi 4 pro characteristica.

VI. Scopus itaque artificii, quo tabulæ logarithmicæ constituuntur, eò tendit, ut inveniantur logarithmi omnium numerorum, qui sunt inter 1 & 10, inter 10 & 100 &c. Qua in re illud observandum est, vulgares numeros alios dici *primos*, alios *compositos*. Primi numeri sunt, quos sola unitas metitur, seu, qui nullam habent partem, præter unitatem; ut sunt 2,

3, 5, 7, 11, 13 &c. Compoſiti verò ſunt, quos præter unitatem numerus quiſpiam metitur; ut 4, 6, 8, 9 &c. Ad logarithmorum tabulas condendas ſufficit inquirere logarithmos numerorum primorum; etenim ex his omnium compoſitorum logarithmi enaſcuntur, utì mox oſtendam.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

183. *Invenire logarithmos omnium numerorum, qui primi vocantur, quique terminis progreſſionis geometricæ decuplæ interjecti ſunt.*

Reſolutio. Oporteat invenire logarithmum numeri 3, qui, cùm ſit interjectus inter 1 & 10, poſtulat, ut ipſius logarithmus quæſitus, ſit pariter interjectus inter logarithmos 0 & 10000000 numerorum 1 & 10. Quæratur itaque medius proportionalis geometricus inter 1 & 10, & pariter medius proportionalis arithmeticus inter 0 & 10000000, ut in Elementis Arithmeticæ præſcribitur; ac toties repetatur hæc operatio inter alios, alioſque numeros (quod exemplo mox demonſtrabimus), donec invenias logarithmum præcisè reſpondentem numero 3. Obſervandum præterea eſt, in hujuſmodi operationibus toties radicem quadratam extrahi oportere; quia verò difficile eſt ex numeris tam parvis tot extrahere radices, quin incidas in reſiduum, quod tutò negligi non poſſit, ac proinde ſubſequentes operationes implicentur; docent numeris 1 & 10 adjiciendas eſſe, quot volueris, ciphras, puta, ſeptem; quod perinde eſt, ac ſi uterque numerus multiplicaretur per 10000000, atque hac ratione geretur diviſus in partes decimales quàm n eo conſilio, ut fractiones, quæ in extraction

cum negliguntur, nullum afferant ſenſibilem errorem. His animadverſis

Sint A & Z hi duo numeri 1 & 10 ſeptem ciphris auĉti, qui inter ſe multiplicentur; & ab eorum producto 100000000000000 extrahatur radix quadrata, vel magis proxima B 31622777. Hic numerus erit medius geometricus inter A & Z. Inveniatur pariter medius proportionalis arithmeticus inter logarithmos numerorum A & Z; quod obtinebimus (*n.* 169.), ſi addantur ſimul eorum logarithmi 00000000 & 10000000, quorum ſumma eſt 10000000, cujus ſemiſſis 05000000 erit medius arithmeticus, qui e regione ponitur medio geometrico B.

Jam verò, ſi nuper inventus medius geometricus B, foret 30000000, haberemus idipſum, quod quærimus; & medius arithmeticus 05000000 eſſet ipſius logarithmus. Cùm autem medius geometricus B 31622777 major ſit numero 30000000, oportet, ut inter hunc medium B majorem, & numerum A minorem quæratur medius geometricus C, & inter eorum logarithmos medius arithmeticus.

Secundus hic medius geometricus C minor utique eſt numero 30000000; ſed ad eumdem magis accedit, quàm numerus A. Itaque omiſſo numero A, quæratur tertiò medius geometricus D, inter C & B; & in qualibet operatione quæratur pariter medius arithmeticus inter eorum logarithmos.

Hic tertius medius geometricus D adhuc minor eſt numero 30000000, cui tamen proximior eſt, quàm numerus C. Omittatur itaque C; quæraturque quartus medius geometricus E, inter D & B.

Cùm autem quartus inventus medius geometricus E adhuc minor ſit numero 30000000, quærendus inter E & B, quintus F; qui cùm adhuc ſit minor numero 30000000, eadem methodo quærendus inter F & B, ſextus G.

Hic

	Geometricè.	*Arithmeticè.*		*Geometricè.*	*Arithmeticè.*
A	10000000	00000000	H	29961428	04765625
B	31622777	05000000	M	29995132	04770508
Z	100000000	10000000	L	30028875	04775391
A	10000000	00000000	M	29995132	04770508
C	17782794	02500000	N	30011999	04772949
B	31622777	05000000	L	30028875	04775391
C	17782794	02500000	M	29995132	04770508
D	23713737	03750000	O	30003564	04771729
B	31622777	05000000	N	30011999	04772949
D	23713737	03750000	M	29995132	04770508
E	27384196	04375000	P	29999348	04771118
B	31622777	05000000	L	30003564	04771729
E	27384196	04375000	P	29999348	04771118
F	29427272	04687500	Q	30001456	04771423
B	31622777	05000000	O	30003564	04771729
F	29427272	04687500	P	29999348	04771118
G	30505279	04843750	R	30000402	04771271
B	31622777	05000000	Q	30001456	04771423
F	29427272	04687500	P	29999348	04771118
H	29961428	04765625	S	29996869	04771194
G	30505279	04843750	R	30000402	04771271
H	29961428	04765625	S	29999869	04771194
I	30232130	04804687	T	30000132	04771233
G	30505279	04843750	R	30000402	04771271
H	29961428	04765625	S	29999869	4
K	30096474	04785156	V	30000000	2
I	30232130	04804687	T	30000132	
H	29961428	04765625			
L	30028875	04775391			
K	30096474	04785156			

Hic enimverò ſextus G major eſt numero 30000000, ſed minor numero B. Quamobrem quæratur ſeptimus medius geometricus H, inter F & G.

Atque ita deinceps, ſemper inquirendo medium geometricum inter proximè majorem medium jam inventum, & proximè minorem ipſo ternario, ſeu 30000000, quouſque occurrat medius, qui ab eodem 3 nulla fractione differat, ac proinde poſt ipſum 3 omnes figuræ ſint 0; & aſſignando ſimul cuicunque medio geometrico ſuum medium arithmeticum, ſeu logarithmum; nam inventus cùm fuerit dictus medius geometricus, ejus logarithmus pro ternarii logarithmo capiendus erit.

Igitur poſt decimam nonam operationem pervenietur ad medium geometricum V 30000000; cui reſpondebit medius arithmeticus 4771213, logarithmus ternarii inventus ad logarithmum denarii 10.0000000.

Corollarium.

184. SImili artificio habebis omnium numerorum 2, 5, 7, qui vocantur primi, logarithmos interjectos inter 1 & 10; pariter logarithmos numerorum primorum, nimirum, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, qui interponuntur inter 10 & 100; ac denique logarithmos eorum, qui ſunt inter 100 & 1000.

Nam logarithmi numerorum primorum, qui excedunt numerum 1000, facilè invenientur additione ſimplici, citra erroris ſenſibilis periculum, ut mox oſtendam.

Scho-

Scholion.

IN tabulis ſupputandis non eſt neceſſe eam, quam expoſuimus, methodum adhibere, niſi in numeris primis; nam in iis numeris, qui ex aliorum multiplicatione oriuntur, quique dicuntur compoſiti, ſatis erit logarithmos componentium addere, ut habeatur logarithmus producti; quod ſtatim demonſtrare pergam.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

185. *INvenire logarithmos omnium numerorum compoſitorum.*

Reſolutio. Inventis logarithmis omnium primorum uſque ad 1000, multò faciliùs invenientur logarithmi omnium numerorum ex illis compoſitorum. Nam, *ſi duo numeri primi, multiplicatione alium componant, logarithmi componentium ſimul additi dabunt logarithmum compoſiti, ſeu producti.* Et contra, *ſi a logarithmo numeri compoſiti ſubducatur logarithmus unius numeri componentis, relinquetur logarithmus alterius componentis, ſeu quotientis;* ut dictum eſt n. 175. & 178.

Itaque, ſi a dato logarithmo numeri 10 ſubducatur logarithmus, quem pono inventum, numeri 5, reſiduum erit logarithmus numeri 2.

Si logarithmus numeri 2 addatur logarithmo numeri 3, habebitur logarithmus numeri 6.

Et quoniam quaternarius binarii quadratus eſt, & octonarius, ejuſdem cubus; logarithmus [illegible]ii duplicatus, erit quaternarii logarithmus, tr[illegible]au-tem, octonarii (*n.* 176.).

Ita quoque logarithmus ternarii d[illegible]it novenarii logarithmus. Et ſumma logari[illegible]

merorum 3 & 4, erit logarithmus numeri 12; atque ita procedendo, ex logarithmis numerorum primorum invenies logarithmos numerorum compoſitorum.

Scholion.

HOc artificio ſupputatæ ſunt tabulæ logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 *uſque ad* 100000; *ſed hæ majoris formæ volumen implent. In libellis, qui vulgò ſolent circumferri, producuntur tabulæ uſque ad* 10000. *Nos ad calcem hujus partis, logarithmorum tabulas adjecimus ab* 1 *ad* 1000, *ne voluminis moles augeretur; ac præterea, quòd hæ ad inſtituti noſtri rationem ſatis eſſent. Ne tamen Tirones lateat artificium, quo hujuſmodi tabulæ continuari poſſint ad quemcunque numerum, etiam faciliore methodo pro numeris primis, ſit*

PROPOSITIO X.

PROBLEMA.

186. *COgnitis logarithmis omnium numerorum ab* 1 *uſque ad* 1000, *canonem logarithmicum producere uſque ad* 10000, *ad* 100000 *&c.*

Reſolutio. Obſervetur priùs oportet, hanc eſſe numerorum indolem, ut, quò majores ſunt, eò minus habeant numerorum, qui primi vocantur. Nam ab 1 uſque ad 1000 interjecti ſunt 169 numeri primi; & a 1000 uſque ad 2000, dumtaxat 135; & a 2000 uſque ad 3000, adhuc minores 127; atque ita deinceps diminutione continua; ita ut a 9000 ad 10000 intercipiantur tantummodo 110 numeri primi.

Ex quo ſequitur, pro quovis numero primo haberi ſemper ſeptem, aut octo numeros compoſitos. Verum quidem eſt, eoſdem non eſſe proportionaliter diſpoſitos, aut interjectos cuilibet numero primo; ſed illud

ſemper

ſemper obſervabis, quatuor ſaltem, aut quinque numeros compoſitos vel antecedere, vel ſubſequi continuò quemlibet numerum primum.

His animadverſis, conſtructàque jam tabulà logarithmicà omnium numerorum naturalium ab 1 uſque ad 1000, ut docuimus n. 184. & 185., hæc eadem continuari poterit a 1000 ad quemlibet alium numerum, hoc artificio.

I. E regione cujuſvis numeri compoſiti collocentur logarithmi, qui ad eumdem ſpectant; & inveniantur per præced. Probl.

II. His poſitis, vacuæ remanebunt cellulæ logarithmorum, qui numeris primis reſpondere debent, inter quos, aut ſupra, aut infra, ſemper habebuntur quatuor, aut quinque logarithmi numerorum compoſitorum, ſerie non interrupta, ut jam diximus.

III. Sedulò examinetur, quantùm augeantur iidem logarithmi; notabiſque hoc idem incrementum ſemper diminui certa quadam quantitate, quæ non eſt ſemper eadem, ſed quæ non niſi unitate variare debet.

IV. Quamobrem, cognità differentià, quæ perpetuò regnat inter logarithmos inventos numerorum compoſitorum, decerni ſtatim poterit, quantùm hæc diminuenda ſit, ut inveniantur logarithmi numerorum primorum.

Exemplum. Pone jam inventos logarithmos numerorum naturalium 1000 uſque ad 1008, ut in ſequenti tabula; ſitque inveniendus logarithmus numeri primi 1009.

Si logarithmi inventi invicem ſubtrahantur, alter ab altero, hoc eſt, logarithmus numeri 1000 a logarithmo numeri 1001, atque ita deinceps, uſque ad 1008, notabis differentias logarithmorum diminui certa quadam quantitate, quæ variat inter 4 & 5.

Quare, ſi differentia 4310 (logarithmi numeri

1007

1007 a logarithmo numeri 1008) diminuatur quantitate 4, qua differentiæ decreſcunt, & reſiduum 4306 addatur logarithmo numeri 1008, ſumma erit logarithmus numeri primi 1009; qui logarithmus deerat inter 1008 & 1010.

Subduci deinde poterit logarithmus numeri 1009 a logarithmo ſubſequentis 1010, atque ita deinceps, ut conſtet, an logarithmorum differentiæ decreſcant eadem quantitate. Hac methodo logarithmos numerorum primorum facilè obtinebimus; quin imò, ſi quis error irrepſerit in logarithmos numerorum compoſitorum, hac notatione deprehendetur.

Numeri naturales	*Logarithmi*	*Differentiæ*
1000	30000000	
		- - - 4341
1001	30004341	- - - 5
		- - - 4336
1002	30008677	- - - 4
		- - - 4332
1003	30013009	- - - 4
		- - - 4328
1004	30017337	- - - 4
		- - - 4324
1005	30021661	- - - 5
		- - - 4319
1006	30025980	- - - 4
		- - - 4315
1007	30030295	- - - 5
		- - - 4310
1008	30034605	
	4306 - - -	
1009	30038911	

OB-

OBSERVATIO I.

187. *Quid cauſæ ſit, cur numeri progreſſionis decuplæ* 1, 10 *&c., totidem ciphris augeantur, quot logarithmus denarii.*

Cùm nuper quæreremus logarithmum ternarii, interjecti inter 1 & 10, juſſimus, utrique addi oportere 7 ciphras; quod perinde eſt, ac ſi uterque multiplicaretur per 10000000, ac proinde reduceretur in partes decimales quàm minimas, hoc pacto, $\frac{1.0000000}{10000000} = 1$, $\frac{10.0000000}{10000000} = 10$ &c. Ratio eſt, quia numerorum, qui in dicta progreſſione decupla non continentur, logarithmi accurati haberi non poſſunt; adhibitis tamen fractionibus decimalibus, adeo veris propinquos reperire licet, ut, ſi uſum ſpectes, accuratis æquipolleant.

Quod ut ſuperiore exemplo intelligas, cùm quærimus logarithmum, puta, ternarii, nil aliud quærimus, *quàm logarithmum alicujus medii proportionalis inter* 1 *&* 10, *qui ad ternarium quàm maximè accedat.* Itaque inter 1.0000000 & 10.0000000 quæſitus medius proportionalis eſt B 3.1622777 (*Tab. pag.* 151.), & inter eorum logarithmos inventus medius arithmeticus 0.5000000, qui erit logarithmus ipſius B, hoc eſt, numeri ternarium ſuperantis fractione decimali $\frac{1622777}{10000000}$. *Figuræ namque, puncto ad dexteram ſeparatæ, ſunt numerator præſcriptæ fractionis, cujus denominator* 10000000 *refertur ad omnes alios numeros*; quare medius B 3.1622777 legendus eſt $3\frac{1622777}{10000000}$; & rurſum medius T 3.0000132 legendus $3\frac{132}{10000000}$. Numer

in

integer decimalibus præfixus, vocatur logarithmi characteriſtica, ut dictum eſt. Sic continua inquiſitione mediorum proportionalium inter duos numeros, qui ſint proximè majores, & minores, quàm 3, devenitur tandem ad numerum $3.0000000 = 3\frac{000000}{10000000}$, qui vel ne unà quidem millioneſimà differat a 3; atque hinc ejus logarithmus numero 3 attribuitur citra errandi periculum.

Itaque tabulæ, quæ conſtruuntur, nil aliud exhibent, quàm *veris quàm proximos logarithmos numerorum, qui medii ſunt inter* 1 & 10, *inter* 10 & 100 *&c.*, inquirendo ſemper medios proportionales veris quàm proximos, & eorum logarithmos.

OBSERVATIO II.

188. *Leges characteriſticæ in tabulis logarithmicis.* In hac logarithmorum forma notabis, ſi tabulas conſulas, logarithmos numerorum ab 1 ad 9 habere characteriſticam 0, cum aliquot decimalibus adjunctis. Sic numeri 3 invenietur in tabulis logarithmus 0.4771213. At, qui ſequuntur a 10 uſque ad 99, habebunt pro characteriſtica unitatem decimalibus auctam; a 100 ad 999 characteriſticam 2 cum partibus decimalibus; & ita porrò. Sic numeri 15 logarithmus 1.1760913: pariter numeri 171 logarithmus 2.2329961. Hinc,

I. Omnis quantitas, quæ deſignatur unitate, & quolibet ciphrarum numero, puta, 100, 1000 &c., habet in logarithmi characteriſtica tot unitates meris ciphris præfixas, quot ipſa ciphras. Sic numeri 100 logarithmus 2.0000000, numeri 1000 logarithmus 3.0000000.

II. Quilibet alius numerus tot habet pro characteriſtica

riſtica unitates decimalibus præfixas, quot ipſe notis conſtat, unà demptà. Sic numeri 897 logarithmus 2.9527924; & ſic deinceps.

III. Hinc dato quovis numero abſoluto, puta, 62075, quinque figurarum, ſtatim innoteſcere poteſt, ejus logarithmo deberi 4 pro characteriſtica.

IV. Hinc etiam omnes numeri in ratione decupla eumdem habent logarithmum, præter characteriſticam; utì ex appoſita tabula perſpicuum eſt.

V. Hinc etiam logarithmi numerorum, puta, 20, 30, 40, 50 &c., vel 100, 300, 400, 500 &c., decuplam, vel vigecuplam, vel centuplam &c. proportionem habentium ad numeros 2, 3, 4, 5 &c., expeditiſſimè innoteſcunt, mutatà dumtaxat characteriſticà logarithmorum numerorum 2, 3, 4, 5 &c.

Proport.	*Logarithmi*
3	0.4771213
30	1.4771213
300	2.4771213
3000	3.4771213
30000	4.4771213 &c.

OBSERVATIO III.

189. *Ut logarithmus denarii augendus ſit tribus ſaltem ciphris, ut logarithmi aliorum numerorum inveniantur.*

Denarii logarithmus varius ponitur a diverſis Scriptoribus; prout etiam varius ſtatuitur ſinus totus, ſive radius. Cùm enim reperiantur logarithmi reſpectu ſinuum, tangentium &c., ut ex dicendis conſtabit, tantus eſſe debet denarii logarithmus, quantus ipſe radius. Logarithmus denarii nobis eſt 1.0000000; ut etiam communiter ab aliis aſſumitur.

At pro inveniendis logarithmis aliorum numerum, ipſe logarithmus 1.0000000 augendus eſt tribus ſaltem ciphris (quemadmodum in inventione

at

auctus fuit ipſe radius), ut fiat 1.0000000.000; juxta quem logarithmum reperiendi ſunt omnes alii logarithmi, qui poſtea tot figuris ſunt mutilandi (addendo unitatem reſiduo, ubi opus fuerit, non ſecus ac de ſinibus advertimus), quot ciphræ fuerunt adjunctæ ipſi denarii logarithmo; tum in tabulas ordinandi.

Quod ut exemplo intelligas, finge tibi quærendum eſſe methodo ſuperiùs deſcripta, ſeptenarii logarithmum ad logarithmum denarii 1.0000000, prout ſcribitur in tabulis. Sanè, cùm numeri ſint minores, longè breviùs, ac faciliùs ipſummet aſſequeris 0.8450980, quàm ſi ad denarii logarithmum 1.0000000.000 tribus ciphris auctum, quæras ejuſdem ſeptenarii logarithmum 0.8450980.400. At primum minùs idoneum ſtatim judicabis ad reliquos logarithmos, qui ex eo naſcuntur, pro tabulis conſtruendis. Etenim logarithmus ſeptenarii 0.8450980, quadruplicatus facit numeri 2401 logarithmum 3.3803920; at ejuſdem ſeptenarii logarithmus 0.8450980.400 pariter quadruplicatus gignit ipſiuſmet numeri 2401 logarithmum 3.3803921.600, hoc eſt, 3.3803922; prout in tabulis majoribus exhibetur.

Ratio eſt, quia tres ultimæ figuræ 400 ad dexteram in logarithmo ſeptenarii, quæ fractionem $\frac{400}{1000}$ conſtituunt, in multiplicationis proceſſu ad unitatem, binarium, & ultra aſcendere poſſunt.

Inveniendi ſunt igitur omnes logarithmi ad denarii logarithmum 1.0000000.000; e quibus poſtea abjiciendæ ſunt tres ultimæ figuræ, ut perfectiores tabulæ habeantur.

OB-

OBSERVATIO IV.

190. *CUr logarithmi ſine ullis fractionibus in canone diſponi poſſint; cùm tamen ſæpe fractiones continere deberent.*

Ratio eſt, quia omnis error, qui in logarithmis majoribus ad unitatem non perveniat, poteſt negligi; quippe qui tam parva pars eſt ſui totius, ut evaneſcat. Ex quo ſequitur, quòd, *ſi alicui numero addantur quotlibet ciphræ, error in illo additamento factus, negligi poſſit.*

Exemplum. Sit numerus 10000000, cui addamus majoris accurationis gratiâ, duas ciphras 10000000.00; deinde operemur, quaſi nullum punctum interjectum foret; ſitque aliquis error in duabus ultimis ciphris adjectis; Dico tutò negligi poſſe errorem illum. Nam ille error perveniet tantùm ad aliquot centeſimas partes illius numeri; dum enim numero 10000000 addimus duas ciphras, eumdem multiplicamus per 100; ergo, ſi poſt illam interpunctionem ſit aliquis numerus, erit tantùm fractio; puta, 10000000.04, erit $10000000\frac{4}{100}$, quæ ad unitatem non pertingit, ac proinde negligi poteſt. Negligi autem non debet, dum quis tabulam logarithmorum conſtruit, utì notavimus, ne hic error ſæpius repetitus, tandem aliquid notabile efficiat. Quare tabulâ completâ rejiciuntur omnes fractiones.

Corollarium I.

HInc accuratiſſimus erit canon logarithmicus, ſi logarithmus denarii augeatur ne dum [illegible]s, ſed etiam ſeptem ciphris, diſtinctis interpunctio[illegible].

Corollarium II.

SEquitur, quòd ſufficienter cognoſcitur quantitas aliqua reſpectu tabulæ conſtruendæ, ſi dicatur, *eſſe minor aliquo numero maximo cognito, & major alio numero maximo pariter cognito*. Uti, ſi dicatur, aliqua quantitas eſſe major numero 999999.0000004, & minor numero maximo 999999.0000006, ita ut tota differentia ſit poſt interpunctionem; hæc erit ſufficienter cognita reſpectu tabulæ, quæ negligit fractiones, ſeu quidquid poſt interpunctionem ponitur. Nam in hoc caſu dicerem, quantitatem illam eſſe 999999. Ita Archimedes, poſita diametro circuli 497, definivit, circumferentiam eſſe inter terminos 1562 & 1561, hoc eſt, majorem 1561, & minorem 1562.

Corollarium III.

HInc etiam in uſu ordinario calculi ſubducuntur duæ ultimæ ciphræ a quolibet logarithmo, ut brevior ſupputatio evadat, dum reſiduo, hoc eſt, minore numero utimur in reliquis operationibus; niſi forte omni accuratione opus ſit; uti uſuvenit in calculis aſtronomicis. Qua in re illud idem obſervandum, quod monuimus in calculo ſinuum; nam, *ſi duæ ultimæ ciphræ, quæ ſubducuntur, plus valeant, quàm* 50, *addenda erit unitas ultimæ ciphræ reſidui logarithmi, ut exactior ſit calculus; ſi minùs valeant, quàm* 50, *nihil erit addendum reſiduo; ſi præcisè valeant* 50, *pro libito addi poterit unitas reſiduo, vel non addi;* quemadmodum in logarithmo 1.8388491, qui reſpondet numero 69, ſumi poteſt 1.83885; quippe duæ poſtremæ ciphræ 91 plus valent, quàm 50.

Ratio hujus praxis derivatur ex valore ciphrarum creſcentium in proportione decupla, a dextra ad ſiniſtram procedendo. Nam hinc ſequitur, quòd, ſi duæ ciphræ

ciphræ ablatæ efficiant plus, quàm 50, earum valor excedet ſemiſſem unitatis ciphræ ſequentis in tertia ſede; ſi minùs, quàm 50, minùs etiam valeant ſemiſſe unitatis; denique, ſi præcisè ſint 50, exactè adæquent ſemiſſem ciphræ ſequentis. Itaque in noſtro exemplo, adjecta unitate numero 4, logarithmus 1.83885 erit proximior vero.

OBSERVATIO V.

191. *Logarithmus cujuſvis numeri indicat, quot proportionum minimarum interjiciantur inter unitatem, & ipſum numerum, ſive deſignat diſtantiam, quam habet idem numerus ab unitate.*

Ad uberiorem logarithmorum notitiam cenſeo diligenter obſervanda, quæ acutè notat Bonaventura Cavallerius parte 1. Trigon. n. 25. In progreſſione A numerorum geometricè proportionalium, intelligi debent alii, atque alii numeri continuè proportionales, in ratione quidem minima, ita ut *inter unitatem, & denarium concipiantur tot proportionales, quot ſunt unitates in logarithmo denarii, unà demptà*, nempe in hac tabula, *9999999*. Quo fiet, ut proportio, quam habet 1 ad 10 per prædictos terminos *9999999* proportionales intermedios, diviſa ſit in intervalla, ſeu proportiunculas 10000000, tot nimirum, quot ſunt unitates in logarithmo denarii; atque adeo ab unitate uſque ad denarium numerabuntur 10000000 termini minimi proportionales.

A	B
1	0.0000000
10	1.0000000
100	[illegible]
1000	
10000	

Cùm autem eadem ſit proportio 10 ad 100, quæ 1 ad 10, inter 10 & 100 cadent alii *9999999* termini continuè proportionales cum primis. Et ob eamdem rationem inter 100 &

1000, item inter 1000 & 10000 &c. alii *9999999*.

Quamobrem ratio 10 ad 100 diviſa erit rurſus in 10000000 proportiunculas; atque ita ratio 100 ad 1000 in alias 10000000 &c. Hinc ab 1 uſque ad 100 erunt dictarum proportionum 20000000; & uſque ad 1000, erunt 30000000; quantus ſcilicet eſt logarithmus centenarii, millenarii &c.

A	B
1	0.0000000
10	1.0000000
100	2.0000000
1000	3.0000000
10000	4.0000000
Prop.	*Logarithmi.*

Ex quo jam patet, *logarithmum cujuſvis numeri indicare, quot proportionum minimarum interjiciantur inter unitatem, & ipſum numerum*, ſive indicare diſtantiam, quam habet idem numerus ab unitate. Ita quidem denarius diſtat ab 1 per 10000000 proportiunculas, centenarius per 20000000 &c., unuſquiſque ſcilicet per ſuum logarithmum.

At ſpectatà dumtaxat primà logarithmorum figurà, 0, 1, 2, 3 *&c., quæ appellatur characteriſtica*, habetur quidem diſtantia cujuſque numeri ab unitate, ſed per integras proportiones decuplas, hoc eſt non diviſas in 10000000 proportiones; totum enim idem eſt, ac omnes ejus partes ſimul ſumptæ.

OBSERVATIO VI.

192. *QUo pacto logarithmi numerorum etiam naturalium* 2, 3, 4, 5 *&c. ſint indices, ſaltem quàm proximè, proportionum minimarum, quæ inter unitatem, & numerum quemvis interjiciuntur.*

Cum enim inter 1 & 10 ſint alii octo numeri naturales, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; & inter 10 & 100 medient alii 89, nempe 11, 12, 13 &c.; item inter 100 & 1000 alii 899, & ita deinceps; hi quoque in illa eadem ſerie numerorum proportionalium in ratione

ne minima imaginandi ſunt, eiſdemque ſui aſſignandi logarithmi, quamvis in nullum dictorum proportionalium coincidant. Pro logarithmo autem cujuslibet numeri naturalis intermedii, puta, binarii, aſſumetur logarithmus illius minimi proportionalis, qui maximè ad binarium accedat. Pariter pro logarithmo quinarii capiendus erit, abſque erroris ſuſpicione, logarithmus alicujus numeri eorumdem proportionalium, qui a quinario inſenſibiliter differat; & ſic de aliis.

Quare logarithmus etiam ejuſdem binarii erit index, ſed proximus, proportionum minimarum, quæ inter 1 & 2 interjiciuntur; alterius verò cujuſvis numeri ſupra denarium, puta, 47, logarithmus 1.6720978 indicare poteſt, ab 1 uſque ad 47 interjici 1.6720978 proportiones minimas, vel etiam indicare integram proportionem decuplam (propter characteriſticam 1) cadere inter 1 & eumdem 47, ac præterea proportiunculas 6720978.

De Uſu Tabularum.

EXplorată logarithmorum naturâ, & origine, reliquum jam eſt, ut doceam, quomodo dato numero, ejus logarithmus inveniatur, vel contra; & quomodo tabulæ ultra ſuos limites extendi poſſint.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

193. *Dato numero abſoluto non excedente* 1000 *maximum tabularum, ejus logarithmum e tis elicere.*

Reſolutio. Numerus datus vel eſt integer fractus, vel integer cum fracto.

Caſus I.

SI ſit *integer*, eoque minor, ad quem tabulæ pertingunt, is quæratur in ſiniſtra columna ordinum, ubi notatur littera N; & in dextera ejuſdem ordinis e regione occurret ejus logarithmus quæſitus. Ut numeri 934 reperietur logarithmus 2.9703469; & numeri 171 logarithmus 2.2329961; & ſic de aliis.

Caſus II.

SI numerus, cujus quæritur logarithmus, fuerit *fractio ſimplex*, cujus tam numerator, quàm denominator non excedant 1000, utì fractio propoſita $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{14}$; quæratur in tabulis logarithmus utriuſque; & a logarithmo numeratoris auferatur logarithmus denominatoris: differentia erit logarithmus fractionis.

Demonſtratio. Nam in omni fractione, utì oſtenſum eſt in Commentariis Arith. univerſ., denominator eſt ad numeratorem, ut unitas ad fractionem; ergo ſumma logarithmorum denominatoris, & fractionis æquabitur (*n.* 168.) ſummæ logarithmorum numeratoris, & unitatis, hoc eſt, ſoli logarithmo numeratoris, cùm unitatis logarithmus ſit 0; quare, ſi a logarithmo numeratoris auferatur logarithmus denominatoris, remanebit logarithmus fractionis.

Quòd autem differentia duorum logarithmorum numeratoris, & denominatoris ſit logarithmus fractionis, ſic etiam, in gratiam Tironum, aliter declaratur. Sit hæc fractio propoſita $\frac{5}{8}$, quæ, ut conſtat ex Arith., eſt quotiens

Proportionales		*Logarithmi*
Denominator	8	0.9030900
Numerator	5	0.6989700
Unitas	1	0.0000000
Fractio	$\frac{5}{8}$	— 0.2041200

diviſio-

diviſionis, in qua 5 divideretur per 8. Si enim 5 nummi eſſent dividendi inter 8, quilibet $\frac{5}{8}$ quinque octavas accipere deberet; ergo (*n.* 178.) logarithmus diviſoris 8, & quotientis $\frac{5}{8}$ æquatur logarithmo diviſi, nempe 5; ergò, ſi ex logarithmo numeri 5 auferas logarithmum numeri 8, reſtabit logarithmus quotientis, ideſt, fractionis; cùm eadem ſit ratio unitatis ad quotientem, quæ diviſoris ad dividendum.

Monitum.

194. *SI fuerit fractio propriè dicta, in qua denominator excedat numeratorem, logarithmus denominatoris major erit logarithmo numeratoris; ac proinde ille ex hoc ſubtrahi non poteſt. Viciſſim ergo minor logarithmus numeratoris, a majore logarithmo denominatoris ſubducatur; & differentia, ſeu reſiduum, erit adhuc logarithmus propoſitæ fractionis; dummodo huic reſiduo præponatur nota —, more Analyſtarum, qua nota — ſignificetur hoc reſiduum eſſe numerum defectivum, & minorem, quàm nihil; uti factum vides in ſuperiore tabella, in qua logarithmus fractionis* $\frac{5}{8}$ *notatur* — 0.2041200.

Quod autem logarithmus fractionis propriè dictæ *ſit ſemper numerus defectivus, ſic facilè oſtenditur. Nam fractio quælibet minor eſt unitate; ergo ejus logarithmus minor eſt logarithmo unitatis, hoc eſt, minor quam* 0. *Numeri autem infra* 0 *deſcendentes, ſunt numeri defectivi, minores nihilo; notanturque ſinguli ſigno —; hinc, quò minor eſt fractio, eò major eſt logarithmus defectivus; quoniam major eſt diſtantia minoris fractionis ab* 1, *quàm majoris.*

Corollarium.

195. HInc fractiones omnes, quibus *unitas eſt pro numeratore*, habent logarithmum ipſiſſimum denominatoris; puta, fractionis $\frac{1}{12}$ logarithmus idem eſt, ac logarithmus duodenarii, ſed cum hoc diſcrimine, quòd logarithmus duodenarii eſt numerus poſitivus, cui præponitur ſignum + 1.0791812; fractionis autem $\frac{1}{12}$ logarithmus eſt — 1.0791812 numerus defectivus.

Quotieſcunque autem addendus eſt logarithmus fractionis alicui alio logarithmo, vel ſubtrahendus; additio, vel ſubtractio inſtitui debet juxta leges ſignorum + & —, de quibus Scriptores Algebræ tractare ſolent, & in noſtris Comment. Tom. I. n. 19. 26. fuſiùs egimus.

Proportionales		*Logarithmi*
Denominator	12	1.0791812
Numerator	1	0.0000000
Unitas	1	0.0000000
Fractio	$\frac{1}{12}$	— 1.0791812

Caſus III.

196. SI numerus integer *fractionem habeat adjunctam*; cape logarithmum integri, ejuſque differentiam a logarithmo proximè ſequenti; tum regula trium ſic erit inſtituenda. *Si numerus integer augeretur unitate, ejus logarithmus augeretur inventâ differentiâ; cùm ergo augeatur dumtaxat datis partibus unitatis, quantò major evadet ejus logarithmus?* Hoc incrementum invenies per regulam trium, quod additum logarithmo integri, dabit logarithmum *compoſiti ex integro, & fractis.*

Exemplum. Si quæratur logarithmus numeri 257$\frac{1}{3}$,

325^{III}, integri cum adnexa fractione decimali $\frac{325}{1000}$, quære ex tabulis logarithmum numeri integri unitate majoris 258; & ex eo ſubtrahe logarithmum numeri 257: invenies differentiam *16866*; tantùm nempe crevit logarithmus, ubi numerus reſpondens augetur unitate. At in noſtro caſu augetur non quidem 325 unitatibus, ſed 325 milleſimis partibus unitatis; unde ſic erunt termini ordinandi. $1 : 16866 :: \frac{325}{1000}$ ad quartum, quem, minutiis contemptis, invenies 5481. Tantùm ergo crevit logarithmus numeri 257, ob additas eidem numero fractiones decimales datas $\frac{325}{1000}$; quare logarithmo numeri 257 adde incrementum 5481; & habebis numeri $257,325^{\text{III}}$ logarithmum = 2.410481 quàm proximè.

Scholion I.

197. *Quamvis logarithmorum differentiæ, numerorum differentiis non ſint proportionales, tamen ab ea proportione tam parum aberrant in differentiis exiguis, cujuſmodi hæ ſunt, ut pro talibus haberi poſſint, ſine ullo ſenſibilis erroris periculo.*

Scholion II.

198. *Quòd ſi interdum commodiùs ſit, integrum numerum per fractionis denominatorem multiplicare, ita ut tota quantitas ſimul collecta evadat fractio impropria, commodiùs etiam invenietur ejus logarithmus, ſubducendo logarithmum denominatoris a logarithmo numeratoris. Sic, ſi quæratur log. numeri* $9\frac{1}{3}$

$\frac{28}{3}$; *&* *a log. numeri* 28 *aufer log. numeri* 3; *&* *habebis* 0.9700367 *log. numeri* $9\frac{1}{3}$.

Scholion III.

199. *SI fractio ſit decimalis, notabis in ea ſemper ſubaudiri denominatorem conſtantem unitate, ac totidem ciphris, quot ſunt in ipſa notæ decimales. Itaque hujus denominatoris logarithmum ſubtrahe a logarithmo numeratoris; & ſignum — negativum differentiæ præfigens, habebis logarithmum fractionis decimalis. Si quæratur logarithmus fractionis decimalis* 0.194^{III}, *aufer logarithmum numeri* 194 *a logarithmo numeri* 1000 (*hic enim eſt denominator ejus fractionis*); *& habebis logarithmum* -0.7121983 *fractionis* 0.194^{III}.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

200. *DAti numeri excedentis* 1000, *maximum tabularum, quibus uteris, invenire logarithmum vero proximum.*

Reſolutio. Si numerus datus, cujus quæritur logarithmus, major ſit numero 1000, maximo ſcilicet tabulæ, dividatur numerus major, quàm 1000, per diviſores 10, 100, 1000, donec quotiens proximè minor ſit, quàm 1000; ſi enim adhuc ille quotiens major eſſet, divideretur ulteriùs, donec non plus valeat, quàm aliquis eorum numerus, qui in tabulis continentur. Hujus quotientis quæratur logarithmus, cui addatur logarithmus diviſoris 10, vel 100, vel 1000;

hoc

hoc eſt, compendiosè, *quotientis characteriſtica tot unitatibus augeatur, quot ſunt cipbræ in diviſore*. Quòd ſi duplex facta fuerit diviſio, addatur bis logarithmus illius numeri, per quem facta eſt diviſio; ſumma logarithmorum, qui in tabula continentur, diviſoris, & quotientis, æquabit logarithmum numeri dividendi, excedentis 1000.

Demonſtratio pendet ex n. 178.

Exemplum I. Si datus numerus 5430 dividatur per 10, prodibit quotiens 543 minor, quàm 1000: hujus quotientis logarithmus in tabulis inventus, eſt 2.7347998; cui addito 1.0000000 logarithmo diviſoris 10, nempe auctà characteriſticà, unitate, fiet 3.7347998, logarithmus quæſitus numeri 5430.

Exemplum II. Si numeri 453307 quæratur logarithmus, dividatur per 1000, fietque quotiens $453\frac{307}{1000}$: hujus numeri habentis adhærentem fractionem, quæratur logarithmus (*n.* 196.), qui addatur logarithmo numeri 1000, nempe auctà characteriſticà ternario; & prodibit logarithmus numeri propoſiti.

Paucis, hujus regulæ praxis huc tandem redit. *Ex numero dato tot notas, puncto interjecto, reſeca, quot opus eſt, ut evadat proximè minor numero* 1000 *maximo tabulæ; tum ejus logarithmus inquiratur, non aliter, quàm ſi propoſitus numerus ex integris, & decimalibus conſtaret, uti factum eſt n.* 199. *Logarithmi ſic inventi characteriſticam tot unitatibus auge, quot in dato numero notæ pro decimalibus ſunt habitæ; & habebis logarithmum quæſitum.*

Exemplum III. Numeri 257325 quæratur logarithmus. Punctum inſere poſt 257, ut fiat 257.325, cujus numeri cum adnexa fractione decimali invenies logarithmum 2.4104812; & quia tres notæ ab integro reſectæ ſunt, & pro decimalibus habitæ, adde 3 hujus characteriſticæ;

ſticæ; & habebis numeri dati 257325 logarithmum 5.4104812.

Operationis ratio facilè intelligitur. Etenim, dum integri numeri notas aliquas ad ordinem decimalium deprimimus, perinde facimus, ac ſi illum divideremus per numerum conſtantem unitate, & totidem ciphris, quot ſunt depreſſæ notæ. Redibit autem numerus ad priorem quantitatem, ſi illum per eumdem numerum multiplices, per quem diviſus eſt; eritque $257.325 \times 1000 = 257325$. Hæc autem multiplicatio fit additione logarithmorum quotientis, & diviſoris.

Exemplum IV. Si daretur numerus 25732.5^{I}, cum adnexa fractione decimali, quoniam duas tantùm ex integro notas deprimere ad decimales neceſſe eſt, perinde erit, ac ſi illum divideres per 100; quare, invento, ut antea, logarithmo numeri 257.325^{III}, ejus characteriſtica duabus tantùm unitatibus augenda eſſet; & haberemus numeri dati 25732.5^{I} logarithmum 4.4104812.

Scholion I.

201. *NOtandum tamen, quòd, ſi datus numerus ita numeros tabularum excedat, ut pluſquam duplo plures notas habeat, logarithmi hac methodo inventi, non ſatis erunt accurati; cùm proxima ſit, non accurata, ea proportio, in qua regulæ trium uſus innititur. Quare in his caſibus ſatius eſt tabulas conſulere, quæ ad majores numeros pertingunt.*

Scholion II.

202. *SI numerus datus, cujus quæritur logarithmus, ſit compoſitus, & innoteſcat, qui numeri eum producant, addantur logarithmi numerorum producentium, & habebitur dati numeri logarithmus. Ut, ſi detur maximo*

xmo tabulæ major numerus 36480, *qui oritur ex multiplicatione numerorum* 304 & 120; *quæratur logarithmus utriusque: eorum ſumma eſt logarithmus numeri* 36480. *Hæc tamen operatio ſupponit, datum numerum eſſe compoſitum, ac præterea, quòd factores eumdem producentes cognoſcantur; at regula in Problemate propoſita, & univerſalior eſt, & multò facilior.*

Scholion III.

203. *SI ex notis arithmeticis dati numeri ſubducantur una, duæ, vel tres &c., initio facto a dextra; perinde eſt, ac ſi idem numerus divideretur per* 10, *vel* 100, *vel* 1000 *&c. Notæ arithmeticæ, quæ ſiniſtrorſum remanent, ſunt quotiens, & illæ, quæ dextrorſum ſubducuntur, ſunt numerator fractionis, habentis pro denominatore aliquem ex diviſoribus* 10, 100, 1000 *&c., prout ſubducuntur una, vel duæ, vel tres notæ.*

Scholion IV.

204. *INventio logarithmi alicujus numeri ſupra* 1000, *nihil eſt aliud, niſi extenſio tabularum ad numeros majores, quàm* 1000; *intra quem numerum tabulam noſtram circumſcripſimus, ne plus æquo excreſceret. Eſt autem in hac extenſione animadverſio non vulgaris habenda. Nam logarithmi tabularum computati ad denarii logarithmum* 1.0000000, *reſpectu maximorum numerorum ſunt parvi; hinc fit, quòd, cùm eorum differentiæ ſemper decreſcant, ut patet, in hac extenſione tandem evaneſcant, & logarithmi ad æqualitatem reducantur. Hac de cauſa nullam habebunt differentiam logarithmi numerorum, puta,* 2656385774 & 2656385775; *eſt enim utriuſque logarithmus* 9,4242911.

At ſi logarithmi tabularum reſpicerent logarithmum denarii 1.0000000.000, *tunc eorumdem numerorum logarithmi aliquam oſtenderent differentiam; eſſet namque*

numeri

numeri 2656385774 *logarithmus* 9.4242911.457; & *numeri* 2656385775 *logarithmus* 9.4242911.459. *Itaque, niſi maximi numeri valde differant, eorum logarithmi ad denarii logarithmum* 1.0000000 *ſunt æquales. Quapropter, ſi daretur numerus quindecim, viginti figurarum, vel amplius, ſufficeret pro ejus logarithmo ſumere logarithmum primarum ad ſummum decem figurarum.*

Scholion V.

HActenus, *dato numero, ejus logarithmus quæſitus eſt; ſupereſt, ut dato logarithmo, numerus inveſtigetur.*

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

205. DAto *logarithmo non excedente* 3.0000000, *maximum tabularum, ad quem canonis logarithmici extenſio continuata ponatur, invenire in eadem canone numerum eidem reſpondentem.*

Caſus I.

QUoniam propoſitus logarithmus non excedit maximum tabularum numerum, quæratur logarithmus datus inter poſteriores logarithmos, hoc eſt, a logarithmo numeri 100, uſque ad logarithmum numeri 1000: jam, ſi idem logarithmus præcisè occurrat, e regione ipſius in ſiniſtra columna invenies numerum ei congruentem. Ut logarithmi 2.7371926 numerus erit 546, ſi ductum ſequaris characteriſticæ, & notarum proximè ſequentium.

Ca-

Caſus II.

SIn autem non inveniatur exactè, ſed inveniatur dumtaxat in tabulis logarithmus in reliquis æqualis, exceptà tamen characteriſticà, ut ſi proponeretur logarithmus 2.6893089, qui non inveniretur in tabulis, ſed tantùm inveniretur 3.6893089, ita ut tota differentia ſit in characteriſtica; numerus reſpondens huic ultimo, eſt, ut ſupra, 4890. Certum eſt autem, numerum reſpondentem logarithmo dato, cujus characteriſtica eſt 2, inveniri inter 100 & 1000; unde abjicienda eſt numeri inventi 4890 ultima ciphra, & facienda fractio decimalis, hoc modo $489\frac{0}{10}$, hoc eſt, 489, numerus reſpondens logarithmo dato 2.6893089.

Similiter in eadem ſuppoſitione, ſi datus fuiſſet logarithmus 1.6893089, abjiciendæ eſſent duæ ultimæ ciphræ, hoc modo, $48\frac{90}{100}$; ſi 0.6893089, numerus reſpondens eſſet $4\frac{890}{1000}$ &c. Quare regula generalis hæc eſto: *Si characteriſtica logarithmi dati minor fuerit, quàm characteriſtica logarithmi in tabulis inventi, in reliquis figuris æqualis, numerus inventus, & huic reſpondens minuatur tot ad dextram figuris, quot unitatibus illa minor eſt; & erunt reliquæ ad ſiniſtram figuræ numerus integer quæſitus; figuræ autem abſciſſæ erunt fractiones decimæ ejuſdem. Contra verò, ſi characteriſtica logarithmi dati* 4.5523031 *major fuerit, quàm characteriſtica logarithmi in tabulis inventi* 3.5523031, *in reliquis figuris æqualis, numerus inventus, & huic reſpondens* 3567 *augeatur tot ad dextram figuris, quot illa major eſt, nimirum,* 35670; *& ſic auctus numerus quæſitus.*

Caſus III.

206. QUòd ſi datus logarithmus accuratus in tabulis non occurrat, & tamen habeat characteriſticam, quæ in illis continetur, indicio id erit, eumdem pertinere ad numerum integrum cum adjecta fractione; quam, ſi negligere velis, ſumi poteſt numerus proximiori logarithmo reſpondens.

At ſi numerum integrum cum adjecta fractione, reſpondentem logarithmo dato, invenire velis, ita operaberis.

I. Inquirantur in tabulis duo logarithmi, quorum alter ſit proximè major dato, & alter proximè minor: utrumque ex tabulis deprome cum numeris ſibi reſpondentibus.

II. Ex logarithmo proximè majori aufer proximè minorem; & notabis primam differentiam.

III. Hunc ipſum proximè minorem logarithmum aufer a dato; & fiet differentia ſecunda.

IV. Denique numero, qui proximè minori logarithmo reſpondet, adjice fractionem, cujus denominator eſt prima illa differentia, numerator verò ſecunda; & ſic habebis quæſitum numerum, reſpondentem logarithmo dato, qui exactè in tabulis non reperiebatur.

Exemplum. Sit inveniendus numerus, ad quem pertineat logarithmus 2.7375292. Invenies in tabulis 2.7379873 proximè majorem, cui reſpondet numerus 547, & rurſum proximè minorem logarithmum 2.7371926, cui reſpondet numerus 546. Aufer hunc logarithmum proximè minorem & a proximè majori, & a dato logarithmo; & habebis geminas differentias 7947 & 3366. Ex his fractionem compone, utì regula jubet, adjiciendam numero 546, qui proximè minori logarithmo reſpondet; & habebis numerum quæſitum $546+\frac{3366}{7947}$. Opera-

Operationis ratio eſt, quia numerorum differentiæ ſunt differentiis logarithmorum quàm proximè proportionales. Itaque,

Uti je habet 7947, *differentia logarithmorum in tabulis exiſtentium,*

ad 1, *differentiam numerorum illis reſpondentium;*

Ita 3366, *differentia logarithmi proximè minoris a dato,*

ad differentiam, qua numerus dato logarithmo reſpondens, excedit minorem numerum 546.

Fractio inventa facilè revocatur ad decimales numeros, dividendo numeratorem, quot opus fuerit, ciphris auctum, per denominatorem, contemptis etiam tenuioribus minutiis, ſi quotus accuratus haberi nequit. Sic in noſtro caſu fractio $\frac{3366}{7947}$ evadet $\frac{4236}{10000}$; & numerus logarithmo dato reſpondens, 546.4236.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

207. *Dato logarithmo excedente* 3.0000000, *nempe ultimum tabulæ, qua uteris, logarithmum, invenire in eodem canone numerum eidem reſpondentem.*

Reſolutio. Si dati logarithmi characteriſtica tabularum canonem excedit, jam primùm conſtabit ex dictis, quot notas habere debeat quæſitus numerus; totidem nempe, quot characteriſtica logarithmi dati habet unitates, ac præterea unam; quo poſito,

I. A dato logarithmo auferatur logarithmus numeri 10, 100, 1000; ut ſcilicet reſiduum ſit proximè minus logarithmo 3.0000000; hoc eſt, ejus characteriſtica tot unitatibus mulctetur, quot opus ut in tabulis inveniri poſſit.

II. Logarithmus ita depreſſus inquiratur in canone; & ſi accuratus occurrat, numerus ei reſpondens, erit ſubdecuplus, ſubcentuplus, ſubmillecuplus numeri quæſiti. Quandoquidem ſubducere logarithmum numeri 10, vel 100, vel 1000 a dato logarithmo, eſt numerum quæſitum dividere per 10, vel 100, vel 1000.

III. Hoc igitur multiplicato per 10, vel 100, vel 1000, eum nempe numerum, cujus logarithmus ablatus fuerit, producetur quæſitus numerus. Vel breviùs, numerus logarithmo depreſſo reſpondens, tot ciphris auctus, quot unitates e characteriſtica ademptæ fuerint, erit quæſita quantitas.

Exemplum. Sit inveniendus numerus dati logarithmi 5.*6693169*. Jam ex characteriſtica 5 intelligis numerum quæſitum ſex notas habiturum. Itaque,

I. A dato logarithmo auferatur logarith. 3.0000000 numeri 1000; hoc eſt, characteriſtica 5 mulctetur tribus unitatibus, ut fiat 2.*6693169*.

II. Logarithmus ita depreſſus inquiratur in canone; & huic numerum appoſitum invenies 467; qui erit ſubmillecuplus numeri quæſiti.

III. Inventus numerus multiplicetur per 1000, hoc eſt, tot ciphris augeatur, quot unitates e characteriſtica ademptæ fuerint; & habebis 467000, numerum reſpondentem dato logarithmo 5.*6693169*.

Operationis ratio perſpicua eſt. Nam, dum dati logarithmi characteriſticam aliquot unitatibus imminuimus, perinde facimus, ac ſi numerum ei reſpondentem divideremus per numerum unitate, & totidem ciphris expreſſum, quot ſunt e characteriſtica ſublatæ unitates; quantitas igitur huic depreſſo logarithmo reſpondens, in eumdem numerum ducenda eſt, ut illa habeatur, quæ dato logarithmo reſpondet.

208. Quòd ſi logarithmus ita depreſſus non exactè inveniatur in tabulis, ſumatur proximè major, & minor;

minor; & exinde per Probl. præced., quærantur notæ decimales adjiciendæ numero, qui logarithmo proximè minori reſpondet; tum ex his decimalibus notis totidem per multiplicationem ad integros redigantur, quot unitates a characteriſtica dati logarithmi ademptæ fuerint; nam, ſi tot ejuſmodi notæ integro illi numero adjectæ, jam pro integris habeantur, habebitur ſimul quæſita quantitas.

Exemplum. Quæratur numerus dato logarithmo 5.7375292 reſpondens; neque alias habeas ad manum tabulas, quàm hiſce Elementis adjectas. Quoniam dati logarithmi characteriſtica 5 hunc tabularum canonem excedit, mulctetur characteriſtica tribus unitatibus; hoc eſt, a dato logarithmo auferatur logarithmus 3.0000000 numeri 1000, ad quem dumtaxat perductus eſt canon, ut fiat 2.7375292: hujus logarithmi numerus per præced. Probl. inventus, eſt 546.4235, quo multiplicato per 1000, tres ex his decimalibus notis ad integros redigentur; eritque quæſitus numerus 546423.5.

Si datus logarithmus fuiſſet 4.7375292, numerus ei reſponderet 54642.35; logarithmo autem 3.7375292 reſponderet 5464.235.

Scholion.

209. *SI dati logarithmi characteriſtica fuerit plus, quàm duplò major eà, quæ in tabulis maxima occurrit, inventus numerus in ultimis notis accuratus non prodiret hac methodo, ob rationem alibi adductam in re ſimili.*

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

210. *DAto logarithmo negativo, invenire numerum eidem congruum.*

Reſolutio. Quæratur poſitivi logarithmi numerus; & hic unitati ſubſcriptus, fractionem dabit, quæ illi reſpondeat. Sic, ſi detur — 2.7371926, cùm ei reſpondeat 546, erit quæſita quantitas $\frac{1}{546}$.

Scholion.

RElIquæ operationes ad logarithmorum uſum ſpectantes, quomodo ſcilicet eorum ope multiplicatio, diviſio, & extractiones radicum numerorum vulgarium exerceantur, petendæ ſunt ex n. 181. *Tantùm exemplis aliquot indicabo uſum canonis logarithmici in operationibus arithmeticis.*

Multiplicatio. *Oporteat multiplicare* 65 *per* 8. *Quære in tabulis logarithmum utrique appoſitum, nimirum,* 1.8129134 *&* 0.9030900: *horum ſumma* 2.7160034 *dabit logarithmum, cui in iiſdem tabulis e regione reſpondet duorum numerorum factum* 520.

Diviſio. *Quæratur quotiens numeri* 360 *diviſi per* 12. *Utriuſque logarithmi in tabulis ſunt* 2.5563025 *&* 1.0791812; *ſecundus auferatur a primo; & reſiduum erit* 1.4771213, *logarithmus quotientis* 30; *qui ſtatim in propria columna e regione occurret.*

Regula trium. *Datis tribus numeris* 30, 210, 24, *quæratur quartus proportionalis. A ſumma logarithmorum ſecundi* 210, *& tertii* 24, *ſubducatur primi* 30 *logarithmus* 1.4771213; *reſiduum dabit logarithmum, cui e regione in propria columna reſpondebit* 168, *quartus proportionalis.*

Ex-

Extractio radicum. *Extrahenda ſit radix quadrata numeri* 64. *Quæratur in tabulis hujus logarithmus* 1.8061800, *cujus ſemiſſis* 0.9030900 *dabit logarithmum radicis* 8. *Rurſum a numero* 8 *ſit extrahenda radix cubica. Triens logarithmi hujus numeri* 8, *dabit logarithmum* 0.3010300 *radicis cubicæ* 2.

Formatio poteſtatum. *Oporteat numerum* 8 *elevare ad poteſtatem quadratam, vel cubicam &c. Logarithmus ejuſdem numeri* 8 *duplicatus, vel triplicatus, dabit logarithmum quadrati* 64, *vel cubi* 512.

DEFINITIO.

Logarithmi ſinuum, tangentium, & ſecantium, vocantur ſinus, tangentes, & ſecantes artificiales; ut ab iis ſecernantur, qui ſimpliciter vocantur ſinus &c.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

211. *Dati cujuſcunque ſinus logarithmum invenire. Reſolutio* conſequitur ex præced. Nam datus quilibet ſinus exhibeatur tanquam numerus aliquis vulgaris, qualis exponitur in tabulis; cujus logarithmus ſtatim innoteſcet.

Monitum.

Qui canonem logarithmicum conſtruere velint, illud ſedulò animadvertant, logarithmos inveniendos reſpicere debere ipſos ſinus, prout ſunt inventi ad ſinum totum 10000000.000, *nimirum tribus figuris longiores, quàm ſcribantur in tabulis, ut diximus. Quamobrem, ut ex quolibet ſinu jam in tabulis notato, congruens logarithmus eliciatur, addantur prius oportet eidem ſinui t zeri, (quod ferme perinde eſt, ac ſi tres notæ arit*

ticæ rursum adjicerentur, quæ sublatæ fuerant, antequam in tabulas transcriberentur); hujus autem numeri sic aucti tribus ciphris, quæratur logarithmus.

Exemplum. *Invenire oporteat logarithmum sinus grad.* 40. *Quæratur in tabula sinus iste,* 6427876: *huic addantur tres zeri, ac fiat* 6427876000; *cujus jam logarithmus inveniendus est. Ab hoc numero subducantur statim duæ notæ arithmeticæ dextrorsum; ut octo tantùm characteres relinquantur versùs lævam; tum quæratur logarithmus numeri* 64278760, *ut alibi docuimus: invenietur esse* 78080675; *cui addendus est logarithmus numeri* 100, *nimirum,* 20000000; *ut restituantur duæ notæ arithmeticæ, quæ prius sublatæ fuerant; quod ipsissimum fuit, ac si idem numerus divisus fuisset per* 100. *Horum summa* 9.8080675 *est quæsitus logarithmus sinus grad.* 40; *atque ita de reliquis.*

Corollarium.

212. LOgarithmi tangentium, & secantium obtineri possunt, quemadmodum logarithmi sinuum. Logarithmus secantis facilè etiam haberi potest, si logarithmum sinus complementi auferas a logarithmo sinus totius duplicato; cùm enim ita sit sinus complementi ad sinum totum, ut sinus totus ad secantem; erunt logarithmi extremorum æquales duplo logarithmo medii. Quamobrem, cùm logarithmi secantium tanta facilitate ex logarithmis sinuum habeantur, minimè curavi, ut ipsi in tabulis ordinarentur; quod etiam ab aliis factum video.

De

De Uſu conſtructi Canonis logarithmici.

USus conſtructi canonis duobus Problematis continetur, quorum altero, ex datis gradibus arcuum, quæruntur logarithmi ſinus, & tangentis; altero, ex datis logarithmis quæruntur gradus arcuum.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

213. *Datis gradibus cujuſvis arcus, eruere e tabulis logarithmum ſinus ipſis reſpondentem.*

Reſolutio. Si arcus datus non ſit quadrante major, & ſolos gradus contineat, invenietur in prima columna paginæ ſiniſtræ, vel dextræ, prout minor, vel major gradibus 45; ac e regione ipſius in eadem pagina occurret in propria columna logarithmus quæſitus; quemadmodum arcui grad. 40, reſpondet logarithmus 9.808675.

Si præterea arcus datus contineat minuta, idem obſervandum, quod de ſinibus docuimus n. 63. Nimirum, inveniatur logarithmus arcus proximè majoris, & proximè minoris; & capiatur eorum differentia; arcuum autem differentia erit unius gradus, ſeu 60^{I}. Fiat igitur: *Ut* 60^{I} *ad numerum minutorum, quæ in arcu dato continentur ſupra numerum graduum; Ita differentia logarithmorum, qui e tabulis eruti ſunt, ad quartum proportionalem;* qui addatur arcui minori; & habebitur quæſitus logarithmus.

Eadem methodo operaberis, ſi arcus datus contineat etiam minuta ſecunda. Sit arcus datus grad. 16. $43^{\text{I}}\ 38^{\text{II}}$, cujus quæritur logarithmus. Inveniatur, ut

ante, logarithmus arcus proximè majoris, grad. 16. 44', & proximè minoris, grad. 16. 43'; quorum differentia eſt unius minuti primi, hoc eſt, 60''. Cùm autem differentia arcus minoris, grad. 16. 43' ab arcu dato ſit 38'', fiat: *Ut* 60'' *ad* 38''; *Ita* 4204, *differentia logarithmorum arcuum grad.* 16. 43', & 16. 44', *ad* 2663, *quartum proportionalem*; qui addatur invento jam logarithmo 9.4588480 arcus proximè minoris, grad. 16. 43'; & fiet 9.4591143 logarithmus dato arcui conveniens.

Pro logarithmis tangentium eadem eſt operatio.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

214. *DAto logarithmo ſinus, invenire arcum ipſi reſpondentem.*

Reſolutio. Si logarithmus datus inveniatur in tabulis, invenietur etiam arcus ipſi e regione reſpondens; ſi verò non inveniatur, eadem utendum analogia, quam alibi docuimus. Nimirum, quæratur in tabulis logarithmus proximè major, & proximè minor; ſubtrahaturque minor a majore, ut habeatur eorum differentia; tum etiam minor a propoſito logarithmo auferatur, ut innoteſcat differentia eorumdem; & fiat: *Ut differentia logarithmorum proximè majoris, & proximè minoris, ad differentiam proximè minoris a dato; Ita* 60' *ad numerum minutorum*, addendum arcui reſpondenti logarithmo minori. Arcus ita inventus, erit is, qui habebit logarithmum datum.

Exem-

Exemplum I. Eſto logarithmus datus 9.6279472, qui exactè non invenitur in tabulis. Capiatur primò arcus grad. 25.7^{I}, reſpondens logarithmo 9.6278397 proximè minori dato; deinde ſubtrahatur logarithmus 9.6278397, tam a proximè majore ſequenti 9.6281090, ut habeatur differentia prima 2693, quàm a logarithmo dato; & remanebit differentia ſecunda 1075. Fiat denique: *Ut* 2693 *ad* 1075; *Ita* 60^{II}, *differentia nempe arcuum*, *grad.* 25.7^{I}, & 25.8^{I}, *ad quartum proportionalem* 24^{II}, qui addendus erit arcui reſpondenti logarithmo minori. Arcus igitur logarithmo dato 9.6279472 reſpondens, eſt grad. $25.7^{\text{I}}.24^{\text{II}}$.

Exempl. II. Detur logarithmus tangentis, 9.87343, omiſſis poſtremis binis notis, quod fieri poſſe notavimus Obſerv. IV. n. 190.; & quæratur arcus. In tabulis logarithmus tangentis proximè major, abjectis pariter ultimis duabus notis, eſt 9.87711, reſpondens grad. 37; proximè minor eſt 9.86126, reſpondens grad. 36; differentia ſecundi a primo eſt 1585; differentia ſecundi a propoſito eſt 1217. Fiat igitur: *Ut* 1585 *ad* 1217; *Ita* 60^{I} *ad quartum*; & prodit 46^{I}, omiſſis fractionibus. Arcus igitur quæſitus eſt $36^{\circ}.46^{\text{I}}$.

Uſus autem præcipuus hujus canonis logarithmici eſt, ut multò expeditiùs, & commodiùs conficiatur analyſis trianguli rectilinei, mutata multiplicatione in additionem, & diviſione in ſubtractionem. Qua in re hæc eſto regula generalis. I. *Analogiæ termini ordinandi ſunt, perinde ac ſi reſolutio trianguli habenda eſſet ope ſinuum, vel tangentium.* II. *Addatur inſuper logarithmus ſecundi termini logarithmo tertii; & a ſumma ſubducatur logarithmus primi termini; reſiduum erit logarithmus quarti.*

Exempla aliquot, quæ paulo ante applicavimus analogiis habitis ope ſinuum, & tangentium, abunde erunt, ut canonis logarithmici uſus, & artificium Tironibus conſtet.

PROPOSITIO IX.

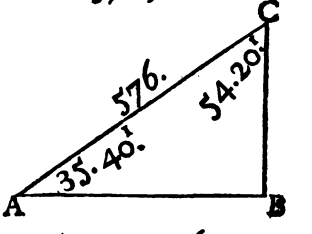
PROBLEMA.

215. *Cognitis angulis acutis, & hypotenuſa trianguli rectanguli, invenire latera.*

Reſolutio. Habes n. 101. hanc analogiam:

Ut ſinus totus	100000
ad ſinum anguli A,	58307
Ita hypotenuſa AC	576
ad latus BC, *oppoſitum angulo* A.	

Jam verò logarithmum ſinus anguli A, *ſecundi termini*, adde logarithmo hypotenuſæ 576, *tertii termini:* ab horum ſumma ſubducatur logarithmus ſinus totius, *primi termini;* reſiduum erit logarithmus *quarti termini;* qui quærendus eſt in tabula; & invenietur reſpondere numero 336 pro latere BC.



Logarithmus ſinus anguli A,	9.7657197
Logarithmus hypotenuſæ AC,	2.7604225
Summa	125261422
a qua ſubducto logarithmo radii,	100000000
reſiduum eſt logarithmus lateris BC,	25261422

qui reſpondet numero 336 circiter.

Eodem modo invenietur latus AB, ſi logarithmus ſinus anguli C, ſubſtituatur loco logarithmi ſinus anguli A.

PRO-

PROPOSITIO X.

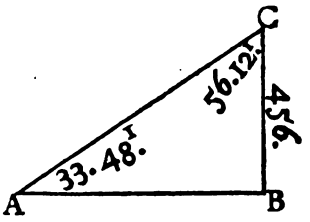
PROBLEMA.

216. *Datis, uno latere, & angulis trianguli rectanguli, invenire aliud latus.*

Reſolutio. Analogia n. 105. eſt hujuſmodi:

Ut ſinus totus	100000
ad tangentem anguli C,	149348
Ita latus BC, *adjacens angulo* C,	456
ad latus AB.	

Logarithmum tangentis anguli C, ſecundi termini, adde logarithmo lateris BC, tertii termini: ab horum ſumma ſubducatur logarithmus ſinus totius, qui eſt terminus primus; reſiduum erit logarithmus quarti termini; qui in canone inventus, dabit 681 pro latere AB.



Logarithmus tangentis anguli C,	101742873
Logarithmus lateris BC,	26589648
Summa	128332521
a qua ſubtracto logarithmo ſinus totius,	100000000
remanet logarithmus lateris AB,	28332521

qui reſpondet numero 681.

PRO-

PROPOSITIO XI.

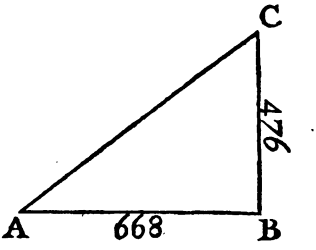
PROBLEMA.

217. *Cognitis duobus lateribus trianguli rectanguli, invenire acutos angulos.*

Resolutio. Accipe analogiam n. 104:

Ut latus AB	668
ad latus BC	476
Ita sinus totus	100000
ad tangentem anguli A.	

Logarithmum lateris BC adde logarithmo sinus totius; & a summa detrahe logarithmum primi termini AB: restabit logarithmus tangentis anguli C.



Logarithmus lateris BC,	26776070
Logarithmus sinus totalis,	100000000
Summa	126776070
a qua subducto logarithmo lateris AB,	28247765
restat logarithmus tangentis anguli A,	98528305

qui in columna logarithmorum tangentium inventus, dabit grad. 35. 28'.

PRO-

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA.

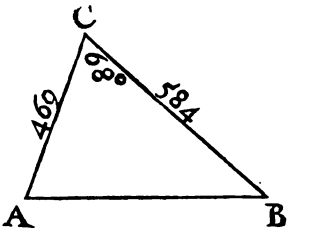
218. *Cognitis duobus lateribus, & angulo intercepto, in triangulo obliquangulo, invenire reliquos angulos.*

Resolutio. Quære analogiam n. 117:

Ut summa duorum laterum AC, BC,	1053
ad eorum differentiam	115
Ita tangens graduum 56, *semissis summæ duorum angulorum* A & B,	148256
ad quartum terminum,	

qui erit tangens semissis differentiæ duorum angulorum A & B.

Logarithmum differentiæ laterum 115, adde logarithmo tangentis grad. 56; & a summa detrahe logarithmum primi termini 1053: residuum erit logarithmus quarti termini, respondens grad. 9.12^{1}, qui conficiunt semissem differentiæ angulorum A & B; ac reliqua peragenda, ut alibi præscripsimus.



Logarithmus differentiæ 115,	20606978
Logarithmus tangentis graduum 56,	101710126
Summa	122317104
a qua subducto logarithmo summæ duorum laterum, 1053,	30224284
restat	92092820

logarithmus tangentis semissis differentiæ angulorum A & B, qui respondet grad. 9.12^{1} &c.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	0.0000000	34	1.5314789	67	1.8260748
2	0.3010300	35	1.5440680	68	1.8325089
3	0.4771213	36	1.5563025	69	1.8388491
4	0.6020600	37	1.5682017	70	1.8450980
5	0.6989700	38	1.5797836	71	1.8512583
6	0.7781512	39	1.5910646	72	1.8573325
7	0.8450980	40	1.6020600	73	1.8633229
8	0.9030900	41	1.6127839	74	1.8692317
9	0.9542425	42	1.6232493	75	1.8750613
10	1.0000000	43	1.6334685	76	1.8808136
11	1.0413927	44	1.6434527	77	1.8864907
12	1.0791812	45	1.6532125	78	1.8920946
13	1.1139433	46	1.6627578	79	1.8976271
14	1.1461280	47	1.6720979	80	1.9030900
15	1.1760913	48	1.6812412	81	1.9084850
16	1.2041200	49	1.6901961	82	1.9138138
17	1.2304489	50	1.6989700	83	1.9190781
18	1.2552725	51	1.7075702	84	1.9242793
19	1.2787536	52	1.7160033	85	1.9294189
20	1.3010300	53	1.7242759	86	1.9344984
21	1.3222193	54	1.7323938	87	1.9395192
22	1.3424227	55	1.7403627	88	1.9444827
23	1.3617278	56	1.7481880	89	1.9493900
24	1.3802112	57	1.7558749	90	1.9542425
25	1.3979400	58	1.7634280	91	1.9590414
26	1.4149733	59	1.7708520	92	1.9637878
27	1.4313638	60	1.7781512	93	1.9684829
28	1.4471580	61	1.7853298	94	1.9731279
29	1.4623980	62	1.7923917	95	1.9777236
30	1.4771213	63	1.7993405	96	1.9822712
31	1.4913617	64	1.8061800	97	1.9867717
32	1.5051500	65	1.8129134	98	1.9912261
33	1.5185139	66	1.8195439	99	1.9956352
34	1.5314789	67	1.8260748	100	2.0000000

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
101	2.0043214	134	2.1271048	167	2.2227165
102	2.0086002	135	2.1303338	168	2.2253093
103	2.0128372	136	2.1335389	169	2.2278867
104	2.0170333	137	2.1367206	170	2.2304489
105	2.0211893	138	2.1398791	171	2.2329961
106	2.0253059	139	2.1430148	172	2.2355284
107	2.0293838	140	2.1461280	173	2.2380461
108	2.0334238	141	2.1492191	174	2.2405492
109	2.0374265	142	2.1522883	175	2.2430380
110	2.0413927	143	2.1553360	176	2.2455127
111	2.0453230	144	2.1583625	177	2.2479733
112	2.0492180	145	2.1613680	178	2.2504200
113	2.0530784	146	2.1643529	179	2.2528530
114	2.0569049	147	2.1673173	180	2.2552725
115	2.0606978	148	2.1702617	181	2.2576786
116	2.0644580	149	2.1731863	182	2.2600714
117	2.0681859	150	2.1760913	183	2.2624511
118	2.0718820	151	2.1789769	184	2.2648178
119	2.0755470	152	2.1818436	185	2.2671717
120	2.0791812	153	2.1846914	186	2.2695129
121	2.0827854	154	2.1875207	187	2.2718416
122	2.0863598	155	2.1903317	188	2.2741578
123	2.0899051	156	2.1931246	189	2.2764618
124	2.0934217	157	2.1958996	190	2.2787536
125	2.0969100	158	2.1986571	191	2.2810334
126	2.1003705	159	2.2013971	192	2.2833012
127	2.1038037	160	2.2041200	193	2.2855573
128	2.1072100	161	2.2068259	194	2.2878017
129	2.1105897	162	2.2095150	195	2.2900346
130	2.1139433	163	2.2121876	196	2.2922561
131	2.1172713	164	2.2148438	197	2.2944662
132	2.1205739	165	2.2174839	198	2.2966652
133	2.1238516	166	2.2201081	199	2.2988531
134	2.1271048	167	2.2227165	200	2.3010300

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
201	2.3031961	234	2.3692159	267	2.4265113
202	2.3053541	235	2.3710679	268	2.4281348
203	2.3074960	236	2.3729120	269	2.4297523
204	2.3096302	237	2.3747483	270	2.4313638
205	2.3117539	238	2.3765770	271	2.4329693
206	2.3138672	239	2.3783979	272	2.4345689
207	2.3159703	240	2.3802112	273	2.4361626
208	2.3180633	241	2.3820170	274	2.4377506
209	2.3201463	242	2.3838154	275	2.4393327
210	2.3222193	243	2.3856063	276	2.4409091
211	2.3242825	244	2.3873898	277	2.4424798
212	2.3263359	245	2.3891661	278	2.4440448
213	2.3283796	246	2.3909351	279	2.4456042
214	2.3304138	247	2.3926970	280	2.4471580
215	2.3324385	248	2.3944517	281	2.4487063
216	2.3344537	249	2.3961993	282	2.4502491
217	2.3364597	250	2.3979400	283	2.4517864
218	2.3384565	251	2.3996737	284	2.4533183
219	2.3404441	252	2.4014005	285	2.4548449
220	2.3424227	253	2.4031205	286	2.4563660
221	2.3443923	254	2.4048337	287	2.4578819
222	2.3463530	255	2.4065402	288	2.4593925
223	2.3483049	256	2.4082400	289	2.4608978
224	2.3502480	257	2.4099331	290	2.4623980
225	2.3521825	258	2.4116197	291	2.4638930
226	2.3541084	259	2.4132998	292	2.4653828
227	2.3560259	260	2.4149733	293	2.4668676
228	2.3579348	261	2.4166405	294	2.4683473
229	2.3598355	262	2.4183013	295	2.4698220
230	2.3617278	263	2.4199557	296	2.4712917
231	2.3636120	264	2.4216039	297	2.4727564
232	2.3654880	265	2.4232459	298	2.4742163
233	2.3673559	266	2.4248816	299	2.4756712
234	2.3692159	267	2.4265113	300	2.4771213

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
301	2.4785665	334	2.5237465	367	2.5646661
302	2.4800069	335	2.5250448	368	2.5658478
303	2.4814426	336	2.5263393	369	2.5670264
304	2.4828736	337	2.5276299	370	2.5682017
305	2.4842998	338	2.5289167	371	2.5693739
306	2.4857214	339	2.5301997	372	2.5705429
307	2.4871384	340	2.5314789	373	2.5717088
308	2.4885507	341	2.5327544	374	2.5728716
309	2.4899585	342	2.5340261	375	2.5740313
310	2.4913617	343	2.5352941	376	2.5751878
311	2.4927604	344	2.5365584	377	2.5763413
312	2.4941546	345	2.5378191	378	2.5774918
313	2.4955443	346	2.5390761	379	2.5786392
314	2.4969296	347	2.5403295	380	2.5797836
315	2.4983106	348	2.5415792	381	2.5806250
316	2.4996871	349	2.5428254	382	2.5820634
317	2.5010593	350	2.5440680	383	2.5831988
318	2.5024271	351	2.5453071	384	2.5843312
319	2.5037907	352	2.5465427	385	2.5854607
320	2.5051500	353	2.5477747	386	2.5865873
321	2.5065050	354	2.5490033	387	2.5877110
322	2.5078559	355	2.5502284	388	2.5888317
323	2.5092025	356	2.5514500	389	2.5899496
324	2.5105450	357	2.5526682	390	2.5910646
325	2.5118834	358	2.5538830	391	2.5921768
326	2.5132176	359	2.5550944	392	2.5932861
327	2.5145477	360	2.5563025	393	2.5943925
328	2.5158738	361	2.5575072	394	2.5954962
329	2.5171959	362	2.5587086	395	2.5965971
330	2.5185139	363	2.5599066	396	2.5976952
331	2.5198280	364	2.5611014	397	2.5987905
332	2.5211381	365	2.5622929	398	[illegible]
333	2.5224442	366	2.5634811	399	[illegible]
334	2.5237465	367	2.5646661	400	[illegible]

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
401	2.6031444	434	2.6374897	467	2.6693169
402	2.6042261	435	2.6384893	468	2.6702459
403	2.6053050	436	2.6394865	469	2.6711728
404	2.6063814	437	2.6404814	470	2.6720979
405	2.6074550	438	2.6414741	471	2.6730209
406	2.6085260	439	2.6424645	472	2.6739420
407	2.6095944	440	2.6434527	473	2.6748611
408	2.6106602	441	2.6444386	474	2.6757783
409	2.6117233	442	2.6454223	475	2.6766936
410	2.6127839	443	2.6464037	476	2.6776069
411	2.6138418	444	2.6473830	477	2.6785184
412	2.6148972	445	2.6483600	478	2.6794279
413	2.6159500	446	2.6493349	479	2.6803355
414	2.6170003	447	2.6503075	480	2.6812412
415	2.6180481	448	2.6512780	481	2.6821451
416	2.6190933	449	2.6522463	482	2.6830470
417	2.6201361	450	2.6532125	483	2.6839471
418	2.6211763	451	2.6541765	484	2.6848454
419	2.6222140	452	2.6551384	485	2.6857417
420	2.6232493	453	2.6560982	486	2.6866363
421	2.6242821	454	2.6570558	487	2.6875290
422	2.6253124	455	2.6580114	488	2.6884198
423	2.6263404	456	2.6589648	489	2.6893089
424	2.6273659	457	2.6599162	490	2.6901961
425	2.6283889	458	2.6608655	491	2.6910815
426	2.6294096	459	2.6618127	492	2.6919651
427	2.6304279	460	2.6627578	493	2.6928469
428	2.6314438	461	2.6637009	494	2.6937269
429	2.6324573	462	2.6646420	495	2.6946052
430	2.6334685	463	2.6655810	496	2.6954817
431	2.6344773	464	2.6665180	497	2.6963564
432	2.6354837	465	2.6674529	498	2.6972293
433	2.6364879	466	2.6683859	499	2.6981005
434	2.6374897	467	2.6693169	500	2.6989700

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
501	2.6998377	534	2.7275413	567	2.7535831
502	2.7007037	535	2.7283538	568	2.7543483
503	2.7015680	536	2.7291648	569	2.7551123
504	2.7024305	537	2.7299743	570	2.7558749
505	2.7032914	538	2.7307823	571	2.7566361
506	2.7041505	539	2.7315888	572	2.7573960
507	2.7050080	540	2.7323938	573	2.7581546
508	2.7058637	541	2.7331973	574	2.7589119
509	2.7067178	542	2.7339993	575	2.7596678
510	2.7075702	543	2.7347998	576	2.7604225
511	2.7084209	544	2.7355989	577	2.7611758
512	2.7092700	545	2.7363965	578	2.7619278
513	2.7101174	546	2.7371926	579	2.7626786
514	2.7109631	547	2.7379873	580	2.7634280
515	2.7118072	548	2.7387806	581	2.7641761
516	2.7126497	549	2.7395723	582	2.7649230
517	2.7134905	550	2.7403627	583	2.7656686
518	2.7143298	551	2.7411516	584	2.7664128
519	2.7151674	552	2.7419391	585	2.7671559
520	2.7160033	553	2.7427251	86	2.7678976
521	2.7168377	554	2.7435098	587	2.7686381
522	2.7176705	555	2.7442930	588	2.7693773
523	2.7185017	556	2.7450748	589	2.7701153
524	2.7193313	557	2.7458552	590	2.7708520
525	2.7201593	558	2.7466342	591	2.7715875
526	2.7209857	559	2.7474118	592	2.7723217
527	2.7218106	560	2.7481880	593	2.7730547
528	2.7226339	561	2.7489629	594	2.7737864
529	2.7234557	562	2.7497363	595	2.7745170
530	2.7242759	563	2.7505084	596	2.7752463
531	2.7250945	564	2.7512791	597	2.7759743
532	2.7259116	565	2.7520484	598	2.7767012
533	2.7267272	566	2.7528164	599	2.777[illegible]
534	2.7275413	567	2.7535831	600	2.77[illegible]

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
601	2.7788745	634	2.8020893	667	2.8241258
602	2.7795965	635	2.8027737	668	2.8247765
603	2.7803173	636	2.8034571	669	2.8254261
604	2.7810369	637	2.8041394	670	2.8260748
605	2.7817554	638	2.8048207	671	2.8267225
606	2.7824726	639	2.8055009	672	2.8273693
607	2.7831887	640	2.8061800	673	2.8280151
608	2.7839036	641	2.8068580	674	2.8286599
609	2.7846173	642	2.8075350	675	2.8293038
610	2.7853298	643	2.8082110	676	2.8299467
611	2.7860412	644	2.8088859	677	2.8305887
612	2.7867514	645	2.8095597	678	2.8312297
613	2.7874605	646	2.8102325	679	2.8318698
614	2.7881684	647	2.8109043	680	2.8325089
615	2.7888751	648	2.8115750	681	2.8331471
616	2.7895807	649	2.8122447	682	2.8337844
617	2.7902852	650	2.8129134	683	2.8344207
618	2.7909885	651	2.8135810	684	2.8350561
619	2.7916906	652	2.8142476	685	2.8356906
620	2.7923917	653	2.8149132	686	2.8363241
621	2.7930916	654	2.8155777	687	2.8369567
622	2.7937904	655	2.8162413	688	2.8375884
623	2.7944880	656	2.8169038	689	2.8382192
624	2.7951846	657	2.8175654	690	2.8388491
625	2.7958800	658	2.8182259	691	2.8394780
626	2.7965743	659	2.8188854	692	2.8401061
627	2.7972675	660	2.8195439	693	2.8407332
628	2.7979596	661	2.8202015	694	2.8413595
629	2.7986506	662	2.8208580	695	2.8419848
630	2.7993405	663	2.8215135	696	2.8426092
631	2.8000294	664	2.8221681	697	2.8432328
632	2.8007171	665	2.8228216	698	2.8438554
633	2.8014037	666	2.8234742	699	2.8444772
634	2.8020893	667	2.8241258	700	2.8450980

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
701	2.8457180	734	2.8656961	767	2.8847954
702	2.8463371	735	2.8662873	768	2.8853612
703	2.8469553	736	2.8668778	769	2.8859263
704	2.8475727	737	2.8674675	770	2.8864907
705	2.8481891	738	2.8680564	771	2.8870544
706	2.8488047	739	2.8686444	772	2.8876173
707	2.8494194	740	2.8692317	773	2.8881795
708	2.8500333	741	2.8698182	774	2.8887410
709	2.8506462	742	2.8704039	775	2.8893017
710	2.8512583	743	2.8709888	776	2.8898617
711	2.8518696	744	2.8715729	777	2.8904210
712	2.8524800	745	2.8721563	778	2.8909796
713	2.8530895	746	2.8727388	779	2.8915375
714	2.8536982	747	2.8733206	780	2.8920946
715	2.8543060	748	2.8739016	781	2.8926510
716	2.8549130	749	2.8744818	782	2.8932068
717	2.8555192	750	2.8750613	783	2.8937618
718	2.8561244	751	2.8756399	784	2.8943161
719	2.8567289	752	2.8762178	785	2.8948697
720	2.8573325	753	2.8767950	786	2.8954225
721	2.8579353	754	2.8773712	787	2.8959747
722	2.8585372	755	2.8779469	788	2.8965262
723	2.8591383	756	2.8785218	789	2.8970770
724	2.8597386	757	2.8780959	790	2.8976271
725	2.8603380	758	2.8796692	791	2.8981765
726	2.8609366	759	2.8802418	792	2.8987252
727	2.8615344	760	2.8808136	793	2.8992732
728	2.8621314	761	2.8813847	794	2.8998205
729	2.8627275	762	2.8819550	795	2.9003671
730	2.8633229	763	2.8825245	796	2.9009131
731	2.8639174	764	2.8830934	797	2.9014583
732	2.8645111	765	2.8836614	798	2.9020029
733	2.8651040	766	2.8842288	799	2.9025468
734	2.8656961	767	2.8847954	800	2.9030900

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
801	2.9036325	834	2.9211660	867	2.9380191
802	2.9041744	835	2.9216865	868	2.9385197
803	2.9047155	836	2.9222063	869	2.9390198
804	2.9052560	837	2.9227255	870	2.9395192
805	2.9057959	838	2.9232440	871	2.9400181
806	2.9063350	839	2.9237620	872	2.9405165
807	2.9068735	840	2.9242793	873	2.9410142
808	2.9074114	841	2.9247960	874	2.9415114
809	2.9079485	842	2.9253121	875	2.9420080
810	2.9084850	843	2.9258276	876	2.9425041
811	2.9090209	844	2.9263424	877	2.9429996
812	2.9095560	845	2.9268567	878	2.9434945
813	2.9100905	846	2.9273704	879	2.9439889
814	2.9106244	847	2.9278834	880	2.9444827
815	2.9111576	848	2.9283958	881	2.9449759
816	2.9116902	849	2.9289077	882	2.9454686
817	2.9122221	850	2.9294189	883	2.9459607
818	2.9127533	851	2.9299296	884	2.9464523
819	2.9132839	852	2.9304396	885	2.9469433
820	2.9138138	853	2.9309490	886	2.9474337
821	2.9143432	854	2.9314579	887	2.9479236
822	2.9148718	855	2.9319661	888	2.9484130
823	2.9153998	856	2.9324738	889	2.9489018
824	2.9159272	857	2.9329808	890	2.9493900
825	2.9164539	858	2.9334873	891	2.9498777
826	2.9169800	859	2.9339932	892	2.9503648
827	2.9175055	860	2.9344984	893	2.9508514
828	2.9180303	861	2.9350031	894	2.9513375
829	2.9185545	862	2.9355073	895	2.9518230
830	2.9190781	863	2.9360108	896	2.9523080
831	2.9196010	864	2.9365137	897	2.9527924
832	2.9201233	865	2.9370161	898	2.9532763
833	2.9206450	866	2.9375179	899	2.9537597
834	2.9211660	867	2.9380191	900	2.9542425

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
901	2.9547248	934	2.9703469	967	2.9854265
902	2.9552065	935	2.9708116	968	2.9858754
903	2.9556877	936	2.9712758	969	2.9863238
904	2.9561684	937	2.9717396	970	2.9867717
905	2.9566486	938	2.9722028	971	2.9872192
906	2.9571282	939	2.9726656	972	2.9876663
907	2.9576073	940	2.9731279	973	2.9881128
908	2.9580858	941	2.9735896	974	2.9885590
909	2.9585639	942	2.9740509	975	2.9890046
910	2.9590414	943	2.9745117	976	2.9894498
911	2.9595484	944	2.9749720	977	2.9898946
912	2.9599948	945	2.9754318	978	2.9903389
913	2.9604708	946	2.9758911	979	2.9907827
914	2.9609462	947	2.9763500	980	2.9912261
915	2.9614211	948	2.9768083	981	2.9916690
916	2.9618955	949	2.9772662	982	2.9921115
917	2.9623693	950	2.9777236	983	2.9925535
918	2.9628427	951	2.9781805	984	2.9929951
919	2.9633155	952	2.9786369	985	2.9934362
920	2.9637878	953	2.9790929	986	2.9938769
921	2.9642596	954	2.9795484	987	2.9943171
922	2.9647309	955	2.9800034	988	2.9947569
923	2.9652017	956	2.9804579	989	2.9951963
924	2.9656720	957	2.9809119	990	2.9956352
925	2.9661417	958	2.9813655	991	2.9960737
926	2.9666110	959	2.9818186	992	2.9965117
927	2.9670797	960	2.9822712	993	2.9969492
928	2.9675480	961	2.9827234	994	2.9973864
929	2.9680157	962	2.9831751	995	2.9978231
930	2.9684829	963	2.9836263	996	2.9982593
931	2.9689497	964	2.9840770	9[illegible]	[illegible]6952
932	2.9694159	965	2.9845273	9[illegible]	[illegible]305
933	2.9698816	966	2.9849771	[illegible]	[illegible]655
934	2.9703469	967	2.9854265	1[illegible]	[illegible]00

TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
PARS QUARTA.

TRIGONOMETRIÆ THEORICO-PRACTICÆ

PARS QUARTA.

De Triangulis ſphæricis.

TRIGONOMETRIA ſphærica eſt ars reſolvendi triangula ſphærica. In omni quippe triangulo ſphærico habentur tria latera, & tres anguli; ex his ſi tria nota ſint, nimirum, vel tres anguli, vel tria latera, vel duo latera, & unus angulus, vel duo anguli, & unum latus, Trigonometria ſphærica docet reliqua invenire; hæc autem inventio dicitur *reſolutio* trianguli ſphærici.

DEFINITIONES, ET PRINCIPIA

DEFINITIO I.

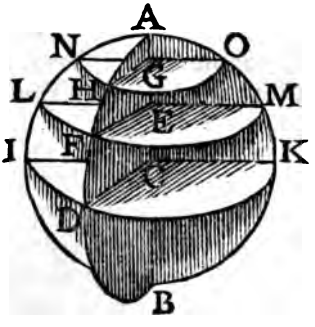
219. SI ſemicirculus ADB circa ſuam diametrum AB immotam gyret, hac integra circumvolutione generat ſolidum, quod *ſphæra* dicitur; & ſemicircumferentia AHFDB generat ſuperficiem curvam, quam *ſuperficiem ſphæricam* vocamus. Juxta hanc geneſim, ſemicirculus ADB dici ſolet *ſemicirculus genitor*.

Corollarium I.

220. HOc ſolidum, ſeu ſphæra commune habet cum ſemicirculo genitore centrum C; *omneſque radii ab hoc centro ad ſphæræ ſuperficiem ducti, æquales ſunt inter ſe;* quippe qui ſunt ipſiſſimi radii ſemicirculi genitoris ADB, in aliquo ſuæ revolutionis inſtanti.

Corollarium II.

221. SI concipiantur infinitæ lineæ HG, FE, DC &c., a quovis puncto ſemicircumferentiæ ADB ductæ perpendiculariter in diametrum AB, omnes hæ lineæ, quæ dicuntur *elementa ſemicirculi genitoris* ADB, integra revolutione ſemicirculi deſcribent totidem circulos NHO, LFM, IDK &c., qui conſiderantur, tanquam *elementa ejuſdem ſphæræ*.



Co-

Corollarium III.

222. ATque hinc, *ſi ſphæra ſecetur quocunque plano, communis interſectio ejuſdem cum ſphæra erit circulus*. Nam I. ſi planum tranſeat per centrum, omnes lineæ in hoc plano ductæ a centro ſphæræ ad ejus ſuperficiem, ſunt æquales (*n.* 220.). Itaque communis ſectio hujus plani cum ſphæra, erit circulus, qui idem cum ſphæra habebit centrum, eoſdemque radios. II. Si planum ſecans non tranſeat per centrum, ejus ſectio cum ſphæra erit parvus circulus, cujus radii erunt HG, FE &c. Nam pro circulo genitore aſſumi ſemper poterit circulus ille, cujus diameter ſit diameter ipſa ſphæræ perpendicularis huic plano ſecanti.

Corollarium IV.

223. HInc *duo circuli, qui tranſeunt per centrum ſphæræ, ſunt inter ſe æquales*. Habent enim omnes centrum idem cum ſphæra, eoſdemque radios. Et circuli, quorum plana tranſeunt per centrum ſphæræ, dicuntur *circuli ſphæræ maximi*, nempe omnium in eadem ſphæra deſcriptorum. Et viciſſim, *circuli maximi per ſphæræ centrum tranſeunt*.

Corollarium V.

224. C*Irculi maximi ſe omnes mutuò bifariam ſecant, & communis interſectio planorum eorumdem eſt diameter ſphæræ*. Cùm enim omnium plana per centrum tranſeant, ſibi occurrunt in centro, & ſeſe invicem ſecant in aliqua recta, quæ tranſit per centrum ſphæræ, quod ipſis commune eſt; ac proinde ipſa eorum planorum interſectio & erit diameter c circulorum, quos proinde ſecabit bifariam, & e meter ſphæræ. Et reciprocè, *circuli, qui ſe m fariam ſecant, ſunt maximi*.

Corollarium VI.

225. SI planum non tranſeat per centrum ſphæræ, ſectio erit circulus *major*, *vel minor*, prout planum ſectionis magis, vel minùs accedet ad centrum ſphæræ.

Corollarium VII.

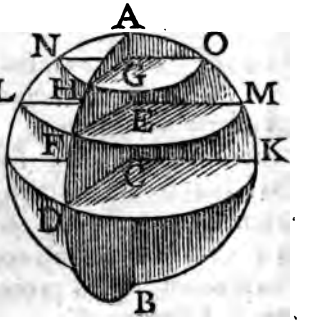
226. PEr *duo quævis puncta aſſumpta in ſuperficie ſphæræ, poteſt duci circulus maximus.* Nam per data duo puncta, & centrum, poteſt duci planum, cujus ſectio cum ſuperficie ſphæræ, erit circulus maximus (*n.* 222.), & tranſibit per data puncta.

Monitum.

227. CUm *deinceps circumferentias, & arcus nominabimus, id intelligas velim de iis arcubus, qui ad maximos ſphæræ circulos ſpectant; quos unicè conſiderat Trigonometria ſphærica.*

DEFINITIO II.

228. DIameter *ſphæræ* eſt quælibet recta linea per centrum extenſa, & utrinque in ſphæræ ſuperficie terminata.



Axis ſphæræ eſt ſola diameter *fixa* AB, circa quam ſphæra convertitur, aut ſemicirculi genitoris ADB motu gignitur.

Poli ſphæræ ſunt extrema puncta axis; *qui poli, ſicut axis, immobiles ſunt.*

Cir-

Circuli ſphæræ habent ſimiliter axem ſuum ſinguli, ſuoſque polos.

Axis circuli NHO, vel LFM &c., eſt linea recta AB, quæ tranſit per ejus centrum G, vel E, & eſt plano ejuſdem circuli perpendicularis.

Poli circuli ſunt puncta extrema ejuſdem axis AB, poſita in ſuperficie ſphæræ.

Corollarium I.

229. *POlus quilibet circuli æquidiſtat ab omnibus punctis ſuæ circumferentiæ.* Nam circuli cujuſvis axis perpendicularis eſt plano ejuſdem, & tranſit per ipſius centrum; ergo puncta quælibet axis æquidiſtant ab omnibus punctis circumferentiæ circuli, cujus eſt axis, perinde ac ipſius circuli centrum. Itaque puncta A & B ſunt poli omnium circulorum parallelorum NHO, LFM, IDK &c., quorum plano recta AB perpendicularis eſt, & per eorum centra tranſit.

Corollarium II.

230. *SI maximus circulus tranſeat per polos alterius maximi circuli, huic erit perpendicularis.* Neque enim per polos hujus circuli tranſire poteſt, quin tranſeat per axem eidem perpendicularem (*n.* 228.); ac proinde neceſſe eſt, ut planum, quod per axem alterius circuli tranſit, ſit eidem perpendiculare.

Corollarium III.

231. ET reciprocè, *ſi maximus circulus ſit alteri maximo circulo perpendicularis, tranſibit quoque per ejuſdem polos.* Cùm enim ambo ſint maximi circuli, habent commune centrum, per quod tranſit utriuſque axis; quare, ſi alter alteri perpendicularis eſt, alter per alterius axem tranſit, & conſequ[illegible] alterius polos.

Corollarium IV.

232. I. *SI maximus circulus tranſit per polos alterius, hic quoque tranſibit per polos primi.* Nam primus perpendicularis erit ſecundo, ac proinde ſecundus perpendicularis primo; itaque tranſibit per ejuſdem polos.

II. *Si duo, aut plures arcus maximorum circulorum ſeſe interſecent in polo alterius circuli, erunt omnes eidem perpendiculares; & reciprocè* (*n.* 230. 231.).

III. Quoniam punctum, in quo ſe mutuò interſecant duo arcus perpendiculares tertio, eſt polus hujus arcus, hinc ſequitur, quòd *a puncto, quod non ſit polus ſui arcus, unicus arcus perpendicularis in eumdem duci poteſt.*

IV. *Si maximus circulus, puta,* AIBK, *tranſeat per polum* A *alterius pariter maximi circuli* IDK, *arcus* AI *primi, interceptus inter polum, & circumferentiam ſecundi, eſt quadrans circuli.* Nam hi duo maximi circuli ſe mutuò bifariam ſecant (*n.* 224.); ac proinde IAK eſt ſemicircumferentia. Præterea polus A æquidiſtat ab omnibus punctis circumferentiæ circuli, cujus eſt polus; & conſequenter arcus AI æqualis erit arcui AK; & uterque erit quadrans circuli.

Corollarium V.

233. HInc *omnes arcus circulorum maximorum, interceptı inter eorumdem polum, & circumferentiam, æquantur inter ſe;* quippe qui ſunt omnes graduum 90; hoc eſt, polus quilibet diſtat gradibus 90

ab

ab omnibus punctis ſui arcus, vel circumferentiæ. Hanc autem diſtantiam metimur potiùs in ipſa ſuperficie ſphæræ, quàm per lineas rectas.

Illud etiam conſequitur ex Coroll. II. III. V., quòd, datis duobus arcubus invicem perpendicularibus, ſi ſuper alterutro accipiatur quadrans circuli a puncto interſectionis, punctum, quod terminabit quadrantem circuli, erit polus alterius arcus.

Corollarium VI.

234. *SI in circumferentia circuli maximi accipiantur duo puncta, quæ non ſint invicem ſeparata per ſemicircumferentiam, horum quodlibet diſtare non poterit gradibus 90 ab alio puncto* A, *quod non ſit polus ejuſdem circuli.* Finge etenim alium maximum circulum I D K, cujus hoc idem punctum A ſit polus. Itaque punctum A diſtabit 90 gradibus a quovis puncto circumferentiæ hujus ſecundi circuli (*n.* 233.). Cùm autem hi duo maximi circuli ſeſe invicem neceſſariò ſecent, punctum A plus minùſve diſtabit a punctis primæ circumferentiæ, quàm a punctis ſecundæ, exceptis duobus interſectionis punctis, quæ ad utramque pertinent, ſed invicem ſeparantur per ſemiperipheriam. Ergo punctum A diſtare non poterit gradibus 90, a duobus primæ circumferentiæ punctis, quæ non ſint invicem ſeparata per ſemicircumferentiam.

Corollarium VII.

235. *HInc, ſi duo puncta arcus minoris ſemicircumferentiæ circuli, diſtent ſingula gradibus 90 a alio puncto, hoc punctum erit polus arcus o agitur Sin autem hæc duo puncta ſint extremi æqual ſemicircumferentiæ, poterunt ſingula i bus 9 ab aliquo puncto, quod non ſit polus e*

DEFINITIO III.

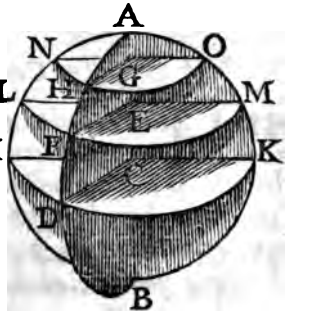
236. *ANgulus ſphæricus* NAH dicitur ille, quem in ſphæræ ſuperficie duo maximorum circulorum arcus AN, AH, ſe mutuò ſecantes continent.

Vel, ut melius origo, & idæa anguli ſphærici concipiatur, *Angulus ſphæricus* NAH ille eſt, quem efficit inclinatio duorum planorum utriuſque maximi circuli ADB, AIB. Ratio eſt, quia angulus NAH non differt ab angulis NGH, LEF, ICD, quorum quilibet eſt menſura inclinationis planorum AIB, ADB, in quovis puncto communis interſectionis AB. Quare *angulus ſphæricus* NAH *eamdem habet menſuram, quam habet angulus, quem efficiunt plana circulorum, ad quos pertinent iidem arcus* AN, AH.

Cùm autem Trigonometria ſphærica verſetur unicè circa maximos circulos, hinc *arcus* ID *erit menſura anguli ſphærici* IAD, *vel* IBD. Ratio eſt, quia & eſt arcus circuli maximi, & eſt menſura anguli ICD, æqualis angulo ſphærico A, vel B.

Corollarium I.

237. ITaque, *dato angulo ſphærico* NAH, *ſi concipiatur tertius circulus* IDK, *cujus polus ſit ſummitas* A *anguli ſphærici, arcus* ID *circuli, interceptus a duobus lateribus* AN, AH, *productis, ſi opus ſit, erit menſura anguli ſphærici*. Nam duo arcus AN, AH, qui ſunt latera ejuſdem anguli, tranſeunt per polum A tertii circuli IDK, per hyp.; ergo duo arcus AN, AH perpendiculares ſunt circulo IDK



(*n.* 230.).

(*n.* 230.). Et reciprocè, tertius hic circulus IDK perpendicularis eſt duobus arcubus, & planis ſuorum circulorum; ac proinde arcus ID, interceptus inter duos arcus, eſt menſura anguli ICD, quem inter ſe efficiunt plana duorum arcuum; qui non differt ab angulo NAH (*n.* 236.).

Corollarium II.

238. *VErtex anguli ſphærici eſt polus arcus, qui eumdem angulum metitur.* Hinc menſura anguli ſphærici a vertice ejuſdem ſemper diſtat quadrante circuli.

Corollarium III.

239. *MEnſura anguli ſphærici eſt perpendicularis ſuis lateribus.* Et viciſſim, *omnis arcus perpendicularis duobus anguli lateribus, eſt ejuſdem menſura.* Quod æquè verum eſſet de arcu, qui pertineret ad minorem circulum; nam etiam hujuſmodi arcus, qui perpendicularis eſſet duobus lateribus, vel, quod eòdem recidit, cujus polus eſſet vertex anguli, jurè aſſumi poſſet tanquam menſura ejuſdem. Verùm Trigonometria ſphærica arcus dumtaxat maximorum circulorum conſiderat.

Corollarium IV.

240. *SI bina anguli latera æquent ſingula quadrantem circuli, arcus, qui baſis eſt, metitur eumdem angulum.* Nam in hoc caſu vertex anguli erit polus arcus (*n.* 237.).

Corollarium V.

241. ET reciprocè, *ſi baſis anguli ſit [illegible] menſura, duo latera æquabunt ſim[illegible]trantem circuli.* Nam arcus, qui angulum [illegible] me-

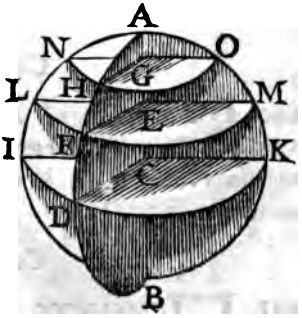
titur, perpendicularis eſt ſuis lateribus (*n.* 239.); ac reciprocè, latera eidem arcui perpendiculariter inſiſtunt. Ergo eorum ſectio fiet in polo ejuſdem arcus; & erunt ſingula æqualia quadranti circuli (*n.* 232.).

Monitum.

NOtabis maximum diſcrimen inter angulum ſphæricum, de quo agimus, & angulum curvilineum, quem duo arcus circulorum in eodem plano deſcriptorum efficiunt. Nam angulus ſphæricus nihil verè eſt aliud, quàm angulus, quem efficiunt plana circulorum, quorum circumferentiæ eodem modo ſeſe invicem ſecant, atque eorum plana. Curvatura harum circumferentiarum, vel convexa, vel concava, non flectitur versùs internam anguli ſphærici partem; contra quàm accidat in angulo curvilineo, cujus latera ſunt arcus, quorum curvatura ad internam anguli partem convertitur.

Corollarium VI.

242. *SI duo arcus* AIB, ADB *maximorum circulorum occurrant in duobus punctis* A & B, *anguli oppoſiti* IAD, IBD *ſunt æquales.* Nam ſinguli æquantur angulo, quem efficiunt plana circulorum (*n.* 236.). Præterea duo arcus AIB, ADB, intercepti a punctis interſectionis, æquantur ſinguli ſemicircumferentiæ (*n.* 224.).



Co-

Corollarium VII.

243. *DUo maximorum circulorum arcus, quorum unus minor ſit ſemicircumferentiâ circuli, non poſſunt claudere ſpatium in ſuperficie ſphæræ.* Ratio eſt, quia, ut claudant ſpatium, opus eſt, ut occurrant in duobus punctis; quod fieri non poteſt, ſi alteruter, vel uterque ſit minor ſemiperipheriâ.

Corollarium VIII.

244. *ANgulus ſphæricus* IDA *rectus eſt, quem metitur quadrans* IA; vel, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus maximorum circulorum ſeſe ad angulos rectos ſecantium, hoc eſt, quorum alter ad alterum rectus eſt, continent.

Angulus ſphæricus *obtuſus* eſt, qui recto major eſt; *acutus* verò, qui recto eſt minor.

Corollarium IX.

245. *SI latera* DI, DA *anguli ſphærici* IDA *ſint ejuſmodi, ut latus* DI *tranſeat per polum* I *alterius lateris* DA, *& viciſſim latus* DA *tranſeat per polum* A *lateris* DI, *angulus ſphæricus* IDA, *quem hæc latera comprehendunt, erit rectus.*

Et reciprocè, *ſi angulus ſphæricus* IDA *ponatur rectus, latus alterum per alterius polum tranſibit.* Conſtat ex num. 230. 231. Nam in utroque caſu duo circuli, eorumque arcus ſunt invicem perpendiculares.

Corollarium X.

246. *ANguli* IDA, BDK, *ad verticem e quos efficiunt arcus ſe invicem ſe æquales ſunt.*

Anguli NAH, HAO, *d ſequent efficit arcus* HA, *occurrens ar , ſimu*

æquantur duobus rectis, hoc eſt, gradibus 180. Nam ſinguli habent pro menſura duos arcus ID, DK, qui ſemicirculum conficiunt; ac proinde, ſi eorum unus rectus eſt, alter erit ſimiliter rectus.

Scholion.

IN hac conſideratione, quæ de angulis rectilineis demonſtrantur Theoremata, aptantur eadem angulis ſphæricis.

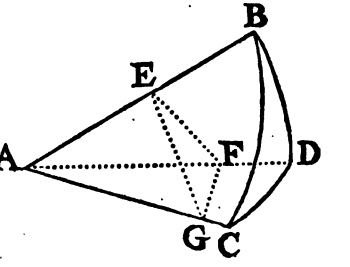
DEFINITIO IV.

247. *TRiangulum ſphæricum* dicitur illud, quod continetur in ſuperficie ſphæræ tribus maximorum circulorum arcubus, qui dicuntur ejus latera.

Ut autem trianguli ſphærici idæa habeatur phantaſiæ Tironum, ac metiendis concipiendiſque ejuſdem angulis accommodatior, conſideretur triangulum ſphæricum BCD inſtar pyramidis triangularis ABCD, cujus vertex A ſit in centro ſphæræ, & baſis BCD ſit portio ſuperficiei ſphæricæ, terminata tribus arcubus maximorum circulorum.

Itaque tres facies hujus pyramidis ſunt totidem maximorum circulorum ſectores BAC, BAD, CAD, quorum tres anguli in centro A habent *pro menſura arcus* BC, BD, CD, *qui ſunt latera trianguli ſphærici* BCD.

Præterea anguli, quos inter ſe efficiunt tria ſectorum plana, ſunt ipſiſſimi anguli trianguli ſphærici; puta, angulus, quem efficiunt ſectores BAC, BAD, eſt angulus ipſe ſphæricus CBD (*n.* 236.).



Scho-

Scholion.

ETſi arcus circulorum non maximorum, tam angulos, quàm triangula ſphærica conſtituant, nihilominus hujuſmodi anguli, atque triangula a Trigonometricis non conſiderantur; ac tanquam inutilia a Definitionibus excluduntur.

248. In triangulis ſphæricis eadem cadit diviſio, quæ in rectilineis, nempe in *Æquilaterum*, *Iſoſceles*, & *Scalenum*. Triangulum ſphæricum *æquilaterum* eſt, quando omnes arcus, quibus continetur, ſunt æquales: eſt *iſoſceles*, ſi duo arcus tantùm æquales extiterint; *ſcalenum* denique eſt, ſi omnes arcus inæquales inter ſe fuerint.

Inſuper dividitur etiam triangulum ſphæricum, ſicuti rectilineum, in *Rectangulum*, *Ambligonium*, *ſeu obtuſiangulum*, & *Oxigonium*, *ſeu acutiangulum*. Eſt porro triangulum ſphæricum *rectangulum*, ſi aliquem angulum habuerit rectum; *obtuſiangulum*, ſi aliquem angulum habuerit obtuſum; ac denique *acutiangulum*, ſi omnes ejus anguli acuti fuerint.

Scholion.

249. *ADvertendum eſt tamen, hoc eſſe diſcrimen inter triangulum rectilineum, & ſphæricum, quòd in triangulo rectangulo, & obtuſiangulo rectilineo duo reliqui anguli neceſſariò ſunt acuti; at in ſphærico triangulo, ſi unus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, alii duo poſſunt eſſe tam recti, quàm obtuſi. Ut autem jam notavimus, triangulum ſphæricum, in quo nullus angulus eſt rectus, vocatur* obliquangulum

Corollarium I.

250. HAbes hinc aliquot de triangulis ſphæricis Propoſitiones, quæ eodem modo demonſtrantur, quo ſimiles Propoſitiones de triangulis rectilineis in Elementis Geom. planæ.

I. *Si duorum triangulorum ſphæricorum latus unum uni æquale fuerit, angulique illis lateribus adjacentes fuerint quoque reſpectivè æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa æqualia erunt.*

II. *Si duorum triangulorum ſphæricorum latus unum uni, & alterum alteri ſit æquale, angulique ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, reliqua omnia, & triangula ipſa æqualia erunt.*

III. *Si duo triangula ſphærica habuerint omnia latera ſibi mutuò æqualia, etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos, habebunt æquales.*

Harum trium Propoſitionum veritas, perinde ac de triangulis rectilineis, demonſtratur per ſuperimpoſitionem.

Scholion.

251. *TRiangula ſphærica, quæ hoc loco comparantur, confici ſupponuntur ſuper eadem ſphæra, vel æqualibus ſphæris. Si enim ſphæræ, ex quarum ſectione oriuntur, eſſent inæquales, tria latera unius eſſent dumtaxat ſimilia tribus lateribus alterius, non autem æqualia. Idemque dici deberet de ſpatio ab iiſdem arcubus, ſeu lateribus intercepto.*

Demonſtrabimus deinceps n. 257., ſi tres anguli unius trianguli ſint reſpectivè æquales tribus alterius, latera primi fore æqualia lateribus ſecundi.

Co-

Corollarium II.

252. *DUo quævis trianguli ſphærici latera ſimul ſumpta, majora ſunt reliquo.* Nimirum, arcus BC in triangulo ſphærico BCD minor eſt ſummà duorum DB, DC. Ratio eſt, quia arcus BC circuli maximi, inter duo quælibet in ſuperficie ſphæræ puncta, eſt via breviſſima.

THEOREMA I.

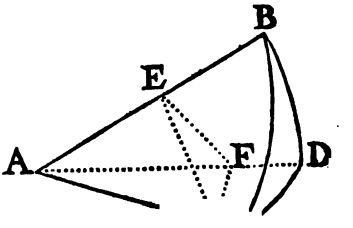
253. *IN quovis triangulo ſphærico tria latera ſimul ſumpta, minora ſunt circumferentiâ circuli, hoc eſt, gradibus* 360.

Demonſtratio. Nam omnes anguli plani, ex quibus conſtat angulus ſolidus, ſimul ſumpti, minores ſunt quatuor rectis (*Tom. II. Geom. n.* 39.); quamobrem, ſi concipiatur pyramis triangularis BACD, tria latera trianguli ſphærici metientur tres angulos planos, ex quibus conſtat angulus ſolidus A; & conſequenter minora erunt gradibus 360, qui menſuram quatuor rectorum efficiunt.

THEOREMA II.

254. *LAtus quodvis trianguli ſphærici minus eſt ſemicircumferentiâ circuli, hoc eſt, gradibus* 180.

Demonſtratio. Nam latus quodvis trianguli ſphærici eſt menſura anguli plani, qui eſt ad verticem pyramidis BACD; at quivis angulus planus ſemper minor eſt duobus rectis; ergo latus quodvis trianguli minus eſt ſemiperipheriâ, quæ eſt menſura duorum rectorum.



THEOREMA III.

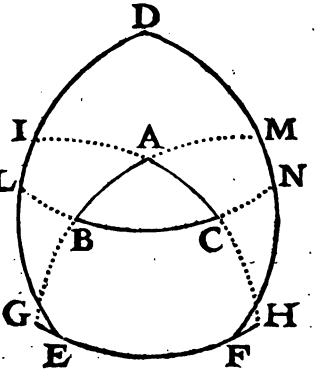
255. *SI tres vertices trianguli ſphærici* ABC *ſint poli trium arcuum, ex quibus triangulum aliud ſphæricum conſtet* DEF, *erit quodvis trium laterum ſecundi, ſupplementum angulorum oppoſitorum primi.*

Et reciprocè, *latera primi ſingula, erunt ſupplementa angulorum oppoſitorum ſecundi.*

Demonſtratur I. pars. Quoniam punctum A eſt polus arcus EF, & punctum B ſimiliter eſt polus arcus FD, punctum F hiſce duobus arcubus commune, diſtabit gradibus 90 a quolibet puncto A & B (*n.* 233.); ac proinde punctum F erit polus arcus AB (*n.* 235.).

Pariter, quia punctum A eſt polus arcus EF, & punctum C polus arcus DE, punctum E utrique arcui EF, DE commune, diſtabit gradibus 90 a punctis ſingulis A & C; & conſequenter punctum E erit polus arcus AC. Eodem modo demonſtrabitur, punctum D eſſe polum arcus BC.

Producantur utrinque tres arcus trianguli ABC, donec occurrant lateribus alterius trianguli. Arcus ſinguli EH, FG erunt graduum 90. Nam polus arcus cujuſvis diſtat 90 gradibus a quolibet puncto ſui arcus (*n.* 233.); quare EH + FG = 180 grad. Atqui EH + FG = EH + EG + EF, ſive GH + EF; ergo GH + EF = 180 gradibus. Quamobrem EF eſt ſupplementum arcus GH. Atqui GH eſt menſura anguli A (*n.* 236.); ergo latus EF eſt ſupplementum anguli A, qui eidem lateri opponitur.



Eo-

Eodem modo demonſtrabitur, DF ſupplementum eſſe anguli B, & DE ſupplementum anguli C. Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Trianguli ABC latera ſingula AB, AC, BC ſupplementa ſunt angulorum oppoſitorum F, E, D. Nam angulus F habet pro menſura arcum MG. Atqui latus AB eſt ſupplementum arcus MG; ſiquidem propter conſtructionem ſummitas A eſt polus arcus oppoſiti EF, ſeu potiùs GH; & conſequenter AG eſt quadrans circuli; eademque de cauſa arcus BM eſt pariter quadrans circuli; quare AG + BM = 180 gradibus. Atqui AG + BM = AG + AM + AB, ſeu MG + AB; ergo MG + AB = 180 gradibus. Conſtat itaque, AB ſupplementum eſſe arcus MG, ſive anguli F.

Eodem modo demonſtrabitur, arcum AC ſupplementum eſſe anguli E, & arcum BC ſupplementum anguli D. Quod erat alterum.

Scholion.

256. *Demonſtratio hujus Theorematis ſupponit, latus quodvis trianguli ſphærici minus eſſe ſemicircumferentiâ circuli; quod oſtenſum eſt n.* 254. *Nam, ſi aliter eſſet, concludi non poſſet, punctum aliquod eſſe polum alicujus arcus, ex eo, quòd diſtet* 90 *gradibus a duobus punctis hujuſmet arcus, ſeu lateris* (*n.* 235.).

Corollarium.

257. *Si tres anguli trianguli ſphærici æquales ſint tribus alterius, ſinguli ſingulis, etiam latera primi erunt mutuò æqualia lateribus ſecundi, ſingula ſingulis.* Nam, ſi duo alia triangula fiant, quorum later habeant pro polis ſummitates angulor duobus primis, latera unius æqualia erunt lat erius hinc (*n.* 250.) anguli unius æquales e s

i.

terius. Atqui anguli horum triangulorum ſunt ſupplementa laterum ex duobus primis triangulis; ergo hæc duo prima triangula habebunt latera mutuò æqualia.

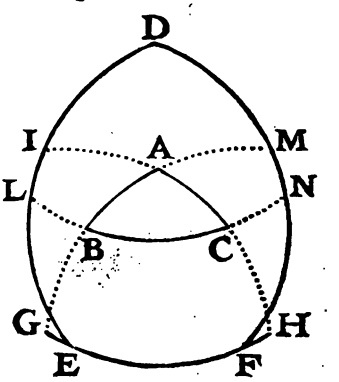
Scholion.

258. *HOc Corollarium applicari non poteſt triangulis rectilineis. Quamvis enim in triangulis rectilineis anguli unius æquales ſint angulis alterius, ſinguli ſingulis; deduci inde non poteſt, etiam latera mutuò eſſe æqualia; duo quippe triangula rectilinea poſſunt eſſe ſimilia, quin eorum latera ſint æqualia.*

THEOREMA IV.

259. *IN omni triangulo ſphærico ſumma angulorum major eſt duobus angulis rectis, ſeu gradibus* 180; *& minor eſt ſex angulis rectis, ſeu gradibus* 540.

Demonſtratur I. pars. Angulus quivis trianguli ABC, conjunctus lateri oppoſito trianguli DEF, conficit duos rectos; quippe alter alterius eſt ſupplementum (*n.* 255.). Ergo tres anguli primi trianguli ABC, adjuncti tribus lateribus alterius DEF, conficiunt valorem ſex rectorum. Jam verò, quoniam tria latera trianguli ſphærici ſimul ſumpta, non æquant circumferentiam circuli (*n.* 253.), ac proinde minora ſunt quatuor angulis rectis; hinc ſumma trium angulorum primi trianguli ABC, major erit duobus angulis rectis. Quod erat primum.



Demonſtratur II. pars. Angulus quivis ſphæricus minor eſt duobus rectis. Nam, ſi arcus quivis occurrat alte-

ri

ri ulteriùs producto a puncto concurſus, efficit duos angulos deinceps poſitos; quorum ſumma dumtaxat æquatur duobus rectis. Ergo ſumma trium angulorum trianguli ſphærici, minor eſt ſex angulis rectis, ſeu gradibus 540. Quod erat alterum.

Corollarium I.

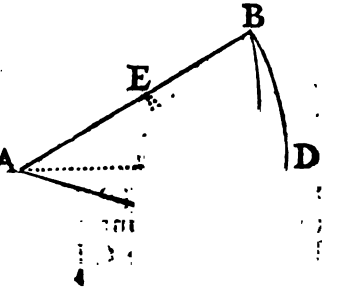
260. HAbes limites, intra quos continetur valor trium angulorum trianguli ſphærici: hi limites ſunt, *binc duo anguli recti, inde ſex anguli recti*. Valor autem trium angulorum in triangulis ſphæricis quàm maximè variatur, ſed intra hoſce limites.

Nam I. tres anguli poſſunt ſinguli eſſe obtuſi; quoniam eorum ſumma minor erit ſex angulis rectis. II. Eadem de cauſa nihil impedit, quo minùs omnes tres anguli ſint recti. III. Similiter poterunt eſſe omnes acuti, dummodo trium acutorum ſumma major ſit duobus rectis. IV. Denique trium angulorum ſpecies variare poteſt in eodem triangulo, intra conſtitutos limites.

Corollarium II.

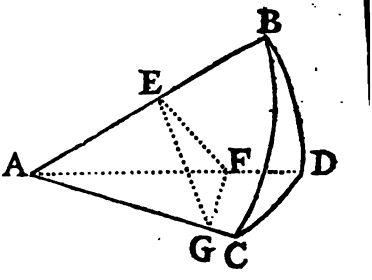
261. ITaque datis duobus angulis trianguli ſphærici, determinari non poteſt valor tertii.

Illud etiam ſequitur, *quò majora ſunt latera trianguli ſphærici, eò majores quoque fieri angulos, quamvis non eadem proportione*. Quod ut planiùs intelligas, conſule pyramidem triangularem ABCD, quam in definitione trianguli ſphærici attulimus n. 247. Si anguli ſectorum BAC &c. eſſent infinitè parvi, arcus BC &c. eſſent quoque infinitè



parvi, & inſtar linearum rectarum; ac proinde triangulum ſphæricum infinitè accederet ad triangulum rectilineum; in quo caſu, trium angulorum ſumma conſiderari poſſet tanquam æqualis duobus angulis rectis.

Contra verò, ſi ſumma angulorum planorum in vertice pyramidis proximè accedat ad valorem quatuor rectorum, hujuſmodi ſectores BAC &c. conficerent inter ſe angulos valde obtuſos, quorum ſinguli proximè accederent ad duos rectos. Nam in hoc caſu arcus, qui metiuntur angulos planos, deſinerent proximè in eamdem circuli circumferentiam. Conſtat itaque propoſitum.

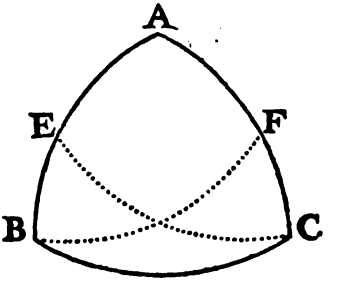


THEOREMA V.

262. *SI trianguli ſphærici* ABC *duo latera* AB, AC *æqualia inter ſe fuerint, anguli* C & B, *quibus æqualia latera ſubtenduntur, æquales erunt.*

Et reciprocè, *Si duo anguli* C & B *ſint æquales, etiam latera iis oppoſita, æqualia erunt.*

Demonſtratur I. pars. Sumantur partes AE, AF æquales; ducanturque arcus CE & BF. Triangula AEC & AFB erunt inter ſe æqualia. Nam latera AE, AC primi, æqualia ſunt lateribus AF, AB ſecundi; & præterea angulus A ab iiſdem lateribus comprehenſus, utrique triangulo communis eſt; ergo triangula (*n.* 250.) ſunt inter ſe æqualia; ac proinde CE = BF.



Con-

Conſiderentur jam duo triangula EBC, FBC: I. CE=BF; II. EB=FC; III. BC latus utrique commune; itaque tria latera unius æqualia ſunt tribus alterius, ſingula ſingulis; & conſequenter (*n.* 250.) triangula erunt inter ſe æqualia; & angulus B æqualis angulo C. Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Nimirum, ſi duo anguli B & C ſint æquales, latera iis oppoſita AC, AB fore pariter æqualia. Sumatur BE=CF; ducanturque arcus CE, BF. Conſiderentur duo triangula EBC, FCB: I. latera BE, CF ſunt æqualia per conſtructionem; II. latus BC eſt utrique commune; III. anguli B & C, comprehenſi ab iiſdem lateribus, ſunt pariter æquales; ergo (*n.* 250.) triangula EBC, FCB ſunt æqualia; ac proinde anguli BEC, CFB ſunt æquales; atque hinc æquantur etiam eorum ſupplementa AEC, AFB. Similiter anguli ECB, FBC ſunt æquales; ergo duæ reliquæ partes ABF, ACE, angulorum integrorum in B & in C, erunt quoque æquales; denique latera CE, BF horum angulorum ſunt etiam æqualia. Ergo in hiſce duobus triangulis AEC, AFB, baſes CE, & BF ſunt æquales; & anguli adjacentes baſibus, ſunt mutuò æquales, ſinguli ſingulis; ergo (*n.* 250.) duo hæc triangula AEC, AFB ſunt perfectè æqualia; & conſequenter AE=AF. Aliunde per conſtruct., BE=CF; ergo latera AB, AC ſunt æqualia. Quod erat alterum.

Corollarium.

263. HInc patet, omne triangulum ſphæricum æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum; & viciſſim.

THEOREMA VI.

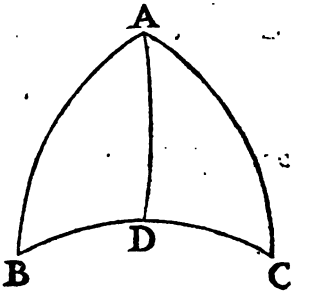
264. *SI ab angulo verticali* A, *intercepto a lateribus æqualibus trianguli iſoſcelis* ABC, *demittatur arcus, qui baſim* BC *bifariam ſecet in puncto* D; *Dico I. triangulum* ABC *diviſum iri in duo æqualia triangula, II. arcum* AD *fore perpendicularem baſi* BC.

Demonſtratur I. pars. Duo latera BA, BD, & angulus B interceptus, in primo triangulo ABD, æqualia ſunt lateribus CA, CD, & angulo C intercepto, in ſecundo triangulo ACD (*n.* 262.). Ergo duo triangula ADB, ADC ſunt in reliquis omnibus æqualia (*n.* 250.). Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Quoniam duo triangula partialia, ſunt in omnibus æqualia, erit angulus ADB æqualis angulo ADC; aliunde horum angulorum quilibet eſt ſupplementum ad duos rectos reſpectu alterius. Ergo uterque erit angulus rectus, & conſequenter arcus AD perpendicularis baſi BC. Quod erat reliquum.

Corollarium I.

265. *SI ab angulo verticali* A, *intercepto ab æqualibus lateribus trianguli iſoſcelis* ABC, *demittatur arcus* AD, *in baſim perpendicularis, hic dividet I. triangulum* BAC *in duo triangula perfectè æqualia; II. bifariam quoque ſecabit & angulum* A, *& baſim* BC.



Ratio eſt, quia iſtiuſmodi arcus AD non differt ab arcu, qui a vertice A ductus, ſecaret baſim bifariam; nam arcus, qui baſim ita ſecaret, eſſet eidem baſi perpendicularis.

Scho-

Scholion.

266. IN *hoc Corollario ſupponitur, verticem* A *non eſſe polum baſis* BC; *nam ſi polus eſſet, omnes arcus a puncto* A *in baſim, eſſent eidem perpendiculares, perinde ac duo latera* AB, AC.

Corollarium II.

267. SI *arcus* AD *bifariam ſecet angulum* A, *bifariam quoque ſecabit triangulum iſoſceles* BAC; *& arcus* AD *erit baſi perpendicularis.*

Nam duo latera AB, AD, & angulus interceptus BAD in uno triangulo, æquantur duobus lateribus AC, AD, & angulo intercepto CAD in altero triangulo. Præterea, cùm duo anguli deinceps poſiti ADB, ADC ſint æquales, uterque erit rectus, & arcus AD baſi perpendicularis.

Corollarium III.

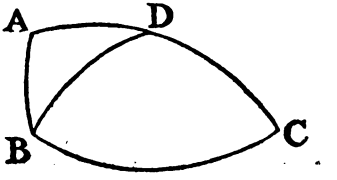
268. ITaque, ſi arcus ab angulo verticali ductus, & interceptus a lateribus æqualibus trianguli iſoſcelis, unam habeat ex his quatuor conditionibus, nimirum, I. bifariam dividat eumdem angulum, II. vel baſim, III. vel triangulum in duo perfectè æqualia triangula, IV. vel perpendiculariter baſi occurrat, habebit quoque tres reliquas conditiones; dummodo data quarta conditione, ſupponatur, verticem A non eſſe polum baſis, ut adnotavimus n. 266.

THEOREMA VII.

269. *OMnis trianguli ſphærici* BAC, *major angulus* B *majori lateri* AC *ſubtenditur; & viciſſim, majus latus majorem angulum ſubtendit.*

Demonſtratur I. pars. Ducatur arcus BD, qui angulum CBD æqualem efficiat angulo C. Duo latera BD, CD trianguli BDC erunt inter ſe æqualia; quippe quæ, per conſtruct., æqualibus angulis ſubtenduntur (*n.* 262.). Jam verò in triangulo BAD duo latera AD & BD ſimul ſumpta, majora ſunt reliquo AB (*n.* 252.). Ergo pariter AD+CD, ſive latus AC, majus eſt latere AB. Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Nimirum, ſi latus AC ponatur eſſe majus latere AB, Dico angulum B majorem fore angulo C. Nam I. ſi hi duo anguli eſſent æquales, latera AC, AB eſſent pariter æqualia (*n.* 262.); contra hypotheſim. II. Nequit præterea angulus C eſſe major angulo B; alioquin latus AB majus eſſet latere AC; quod eſt pariter contra hypotheſim. Ergo angulus B major eſt angulo C. Quod &c.



THEOREMA VIII.

270. *IN omni triangulo ſphærico* ABC, ut in Fig. ſequenti, *ſi ſumma duorum laterum* AB+BC *ſit æqualis, vel major, aut minor ſemicircumferentiâ circuli, angulus internus* A, *oppoſitus lateri* BC, *erit æqualis, vel major, aut minor angulo externo* BCD, *adjacente eidem lateri.*

Demonſtratur I. pars. Producantur arcus AB, AC, donec occurrant in D; erunt arcus ABD, ACD ſinguli æquales ſemicircumferentiæ (*n.* 243.). Ergo, ſi

ſumma

ſumma arcuum AB+BC æquatur ſemicircumferentiæ, ſimiliter atque ABD, ſive AB+BD, habebitur BC=BD; quare in triangulo CBD, anguli C & D æqualibus lateribus BC, BD oppoſiti, erunt æquales. Atqui (*n.* 243.) angulus A = angulo D; Ergo angulus internus A = angulo externo BCD. Quod &c.

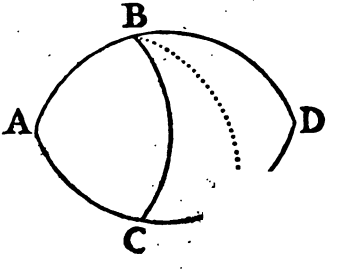
Demonſtratur II. pars. Si AB+BC excedit ſemicircumferentiam ABD, erit BC major arcu BD; & conſequenter in triangulo CBD, angulus D erit major angulo BCD. Atqui A=D; Ergo A erit quoque major angulo BCD. Quod &c.

Demonſtratur III. pars. Si ſumma AB+BC minor eſt ſemicircumferentiâ ABD, erit BC minor arcu BD; & conſequenter angulus D minor angulo BCD. Atqui A=D; Ergo A erit quoque minor angulo BCD. Quod erat reliquum.

Corollarium.

271. *DUo triangula ſphærica poſſunt eſſe inæqualia, quamvis duo anguli unius ſint æquales duobus angulis alterius, ſinguli ſingulis, & latus unum uni æquale; quæ duo latera æqualibus angulis opponantur.*

Eſto triangulum ABC, in quo ſumma laterum AB+BC ſit æqualis ſemicircumferentiæ. Ducatur BE; & comparentur inter ſe duo triangula ABE & CBE: angulus A primi æquatur angulo BCE ſecundi; angulus E utrique communis; quemadmodum commune quoque eſt latus BE, oppoſitum angulo A in primo, & angulo BCE in ſecundo triangulo. Conſtat itaque propoſitum.



Scholion.

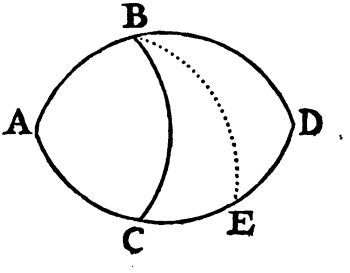
HOc *Corollarium locum non habet in triangulis rectilineis.*

THEOREMA IX.

272. IN *omni triangulo ſphærico* ABC, *ſi angulus internus* A, *oppoſitus lateri* BC, *ſit æqualis, aut major, vel minor angulo externo* BCD, *adjacenti eidem lateri, erit ſumma laterum* AB+BC *æqualis, aut major, vel minor ſemicircumferentiâ circuli.*

Hæc Propoſitio eſt converſa præcedentis.

Demonſtratur. Si angulus A=BCD, erit quoque D=BCD; ergo latera oppoſita hiſce duobus angulis in triangulo BCD, nimirum, BC, BD, erunt æqualia. Atqui ſummâ AB+BD æquatur ſemicircumferentiæ; Ergo ſumma AB+BC eſt pariter æqualis eidem ſemicircumferentiæ. Quod erat primum.



Duo reliqui caſus eodem modo demonſtrantur.

De

De Triangulis ſphæricis rectangulis.

273. DIximus, triangulum ſphæricum *rectangulum* illud eſſe, quod aliquem habuerit angulum rectum, nempe unum, vel etiam plures; & advertimus n. 260., hanc eſſe prærogativam trianguli ſphærici, ut, ſi unus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, alii duo poſſint eſſe tam recti, quàm obtuſi; quod triangulis rectilineis minimè convenire conſtat. Supereſt igitur, ut agamus de triangulis, in quibus unus ſaltem angulus ſit rectus, quæ dicuntur rectangula; & quamvis hypotenuſa ſit unum ex tribus lateribus, nihilo tamen minus *latera dumtaxat appellabimus duos arcus, qui angulum rectum comprehendunt*; niſi forte expreſsè ſermo ſit de tribus lateribus.

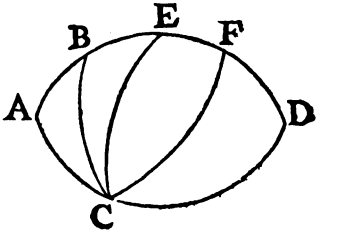
THEOREMA X.

274. *IN omni triangulo ſphærico rectangulo in* A, *anguli adjacentes hypotenuſæ, ſequuntur ſpeciem laterum ipſis oppoſitorum; nimirum,*

I. *Si latus* AE *trianguli rectanguli* EAC, *ſit quadrans, angulus* ACE *oppoſitus, erit rectus.*

II. *Si latus* AB *trianguli rectanguli* BAC *ſit quadrante minor, angulus* ACB *eidem oppoſitus, erit acutus.*

III. *Si latus* AF *trianguli rectanguli* FAC *ſit quadrante major, angulus* ACF *erit obtuſus.*



Et reciprocè &c.

Demonſtratur I. pars. Quoniam angulus A ponitur rectus, arcus AE perpendicularis eſt arcui AC; ergo, ſi per hyp. hujuſmodi arcus AE eſt quadrans

circuli, punctum E erit polus alterius arcus AC (*n.* 233.); & conſequenter CE tranſibit per hunc polum; ergo (*n.* 230.) arcus EC perpendicularis erit eidem arcui AC. Quare angulus ACE, oppoſitus lateri AE, erit rectus. Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Quia arcus BC cadit intra angulum rectum ACE, erit proinde angulus ACB pars anguli recti, & conſequenter acutus. Quod erat ſecundum.

Demonſtratur III. pars. Quia latus, ſive arcus CF cadit extra angulum rectum ACE, angulus ACF erit major recto. Quod erat tertium.

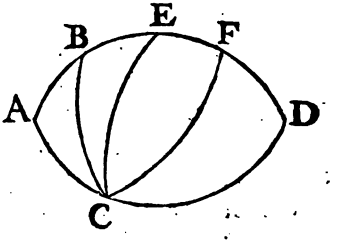
Et reciprocè, ſi angulus ACE ſit rectus, latus oppoſitum AE eſt quadrans circuli. Nam, ſi latus idem eſſet majus, minuſve quadrante, angulus ACE eſſet acutus, vel obtuſus, utì antea demonſtravimus.

Similiter, ſi angulus ACB eſſet acutus, latus oppoſitum AB minus eſſet quadrante. Nam, ſi quadrans eſſet, aut major quadrante, angulus ACB eſſet rectus, vel obtuſus.

Eodem diſcurſu, ſi angulus ACF ſit obtuſus, latus oppoſitum AF quadrantem circuli excedet. Quæ quidem erant demonſtranda.

Corollarium.

275. *IN omni triangulo ſphærico rectangulo, ſi alterutrum duorum laterum anguli recti ſit æquale, vel minus, vel majus quadrante circuli, hoc idem latus erit pariter æquale, vel minus, vel majus hypotenuſa.*



1. Si latus AE eſt quadrans circuli, hypotenuſa EC erit quoque quadrans cir-

circuli. Cùm enim arcus AE perpendicularis ſit arcui AC, propter angulum rectum in A, ac præterea ſit quadrans circuli, punctum E erit polus arcus AC (*n.* 233.); & conſequenter arcus EC, ab hoc polo ductus, erit grad. 90 (*n.* 232.).

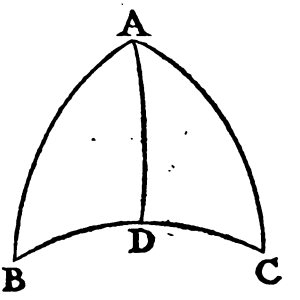
II. Si latus AB minus ſit quadrante circuli, minus quoque erit hypotenusà BC. Nam in hoc caſu, per præced., angulus oppoſitus BCA erit acutus; aliunde angulus A eſt rectus per hyp.; Ergo latus AB, oppoſitum angulo acuto, minus eſt latere BC, quod angulo recto opponitur (*n.* 269.).

III. Si latus AF excedat quadrantem circuli, majus erit, quàm hypotenuſa FC. Nam in hoc caſu angulus eidem oppoſitus ACF eſt obtuſus; aliunde, per hyp., angulus A eſt rectus; & conſequenter latus AF, oppoſitum angulo obtuſo, majus erit, quàm FC, oppoſitum angulo recto (*n.* 269.).

THEOREMA XI.

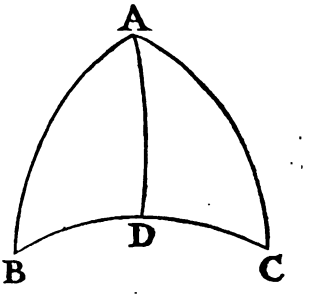
276. *IN omni triangulo ſphærico* BAC, *ſi ab angulo verticali* A *in baſim* BC *perpendicularis arcus demiſſus* AD *cadat intra triangulum, uterque angulorum* B & C *ad baſim, erit ejuſdem ſpeciei, nimirum, vel uterque acutus, vel uterque obtuſus.*

Sin autem arcus idem perpendicularis AD *cadat extra triangulum, uterque angulorum* B & C *ad baſim, erit diverſæ ſpeciei, nimirum, unus acutus, & alter obtuſus.*

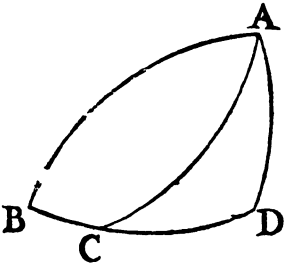


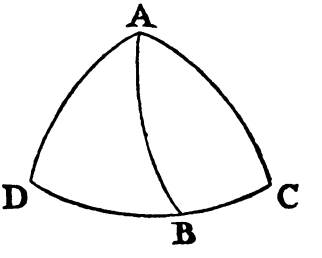
Porro in hoc Theoremate non ſupponitur, triangulum BAC eſſe rectangulum.

Demonſtratur I. pars. Arcus perpendicularis AD duo triangula efficit ADB, ADC, rectangula in D; Ergo angulus B primi, & angulus C ſecundi, uterque ſequitur ſpeciem lateris oppoſiti AD (*n.* 274.); ac proinde duo anguli B & C ſunt ejuſdem ſpeciei. Quod erat primum.



Demonſtratur II. pars. Duo triangula ADB, ADC ſunt rectangula in D; quare angulus ABC, ſive ABD primi, & angulus ACD ſecundi, uterque ſequitur ſpeciem lateris oppoſiti AD; Ergo duo anguli ABC, ACD ſunt ejuſdem ſpeciei. Atqui angulus ACB non eſt ejuſdem ſpeciei reſpectu anguli ACD, quoniam unus eſt ſupplementum alterius; & conſequenter anguli ABC, ACB non erunt ejuſdem ſpeciei. Itaque, quando arcus perpendicularis in baſim demiſſus a vertice, cadit extra triangulum, anguli ad baſim ſunt diverſæ ſpeciei. Quod erat alterum.





Co-

Corollarium.

277. ET reciprocè, *ſi uterque angulorum ad baſim ſit ejuſdem ſpeciei, hoc eſt, vel uterque acutus, vel uterque obtuſus, perpendicularis arcus cadet intra triangulum. Sin autem unus ſit acutus, & alter obtuſus, cadit extra.*

Nam in primo caſu, ſi caderet extra, demonſtratum jam eſt, duos angulos ad baſim fore diverſæ ſpeciei, contra hypotheſim. In ſecundo caſu, ſi caderet intra, duo anguli ad baſim forent ejuſdem ſpeciei, pariter contra hypotheſim.

Scholion.

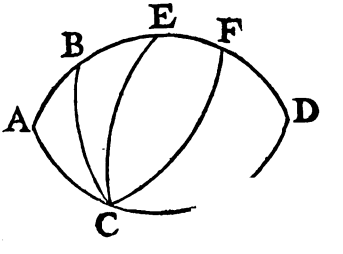
IN hoc Theoremate, ejuſque Corollario ſupponitur, punctum A *non eſſe polum arcus* BC. *Nam, ſi polus eſſet, duo arcus* AB, AC, *atque omnes reliqui arcus a puncto* A *demiſſi in baſim* BC, *eſſent perpendiculares eidem arcui* (*n.* 232.).

THEOREMA XII.

278. *IN omni triangulo ſphærico rectangulo, ſi latus unum anguli recti minus ſit quadrante circuli, hypotenuſa erit in eadem ſpecie, in qua eſt latus alterum.*

Demonſtratur. Eſto triangulum ſphæricum, rectangulum in A, cujus latus AC minus ſit quadrante circuli.

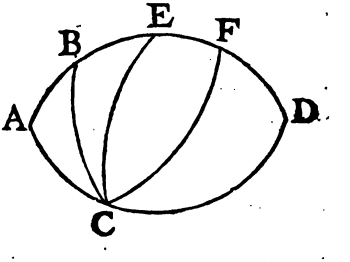
I. Si latus alterum AE trianguli rectanguli EAC ſit quadrans circuli, hypotenuſa EC erit pariter graduum 90. Cùm enim arcus EA ſit perpendicularis arcui AC, propter angulum A rectum, punctum E erit polus hujus arcus (*n.* 231.



233.); & consequenter arcus EC ab hoc polo demissus, erit graduum 90.

II. Si latus alterum AB trianguli rectanguli BAC minus sit quadrante circuli, etiam hypotenusa BC minor erit quadrante. Ut autem planior via demonstrationi aperiatur, accipiatur arcus AE æqualis quadranti circuli; ducaturque arcus CE. Punctum E erit polus arcus AC; & arcus EC erit quadrans circuli; uti jam ostensum est; quare angulus AEC erit acutus; quippe quem metitur arcus AC, minor quadrante per hyp. (*n.* 236.). Atqui angulus ABC est pariter acutus; nam latus oppositum AC supponitur esse minus gradibus 90 (*n.* 275.). Ergo ipsius supplementum CBE est angulus obtusus; & consequenter in triangulo BEC, angulus CBE major erit angulo AEC. Ergo latus EC oppositum primo, majus est latere BC, quod opponitur secundo angulo (*n.* 269.). Jam verò EC est quadrans circuli, perinde ac latus AE; Ergo latus BC minus est quadrante circuli.

III. Si latus AF trianguli FAC excedat gradus 90, hypotenusa FC pariter excedet quadrantem circuli. Nam ex dictis jam constat, arcum EC esse quadrantem circuli, & angulum AEC esse acutum, cujus supplementum erit angulus obtusus. Aliunde angulus AFC est acutus; latus enim oppositum AC minus est quadrante (*n.* 269.); ac proinde in triangulo ECF, angulus E, qui obtusus est, major est angulo CFE; Ergo latus FC majus est latere EC. Atqui EC est quadrans circuli; Ergo hypotenusa FC major est quadrante circuli, quoties latus alterum AF excedat pariter quadrantem circuli.



Co-

Corollarium I.

279. *SI duo latera trianguli rectanguli ſint ejuſdem ſpeciei, hoc eſt, ſi utrumque vel deficiat a quadrante, vel eumdem excedat, hypotenuſa minor erit quadrante circuli.*

Nam I. ſi utrumque a quadrante deficiat, ut in triangulo BAC, rectangulo in A, hypotenuſa per hoc Theorema, erit ejuſdem ſpeciei, in qua eſt alterutrum latus; & conſequenter minor erit quadrante circuli.

II. Si duorum laterum utrumque excedat quadrantem circuli, quemadmodum in triangulo BDC, rectangulo in D, hypotenuſa erit adhuc minor quadrante circuli. Nam hoc triangulum eamdem habet hypotenuſam, quam habet triangulum BAC, cujus latera ſunt ſupplementa laterum trianguli BDC; conſtat autem hypotenuſam trianguli BAC minorem eſſe quadrante circuli, ut jam oſtenſum eſt.

Scholion.

280. SI duo latera anguli recti ſint quadrantes circuli, hypotenuſa erit pariter quadrans circuli. *Nam hæc baſis erit menſura anguli recti* (*n.* 236.).

Corollarium II.

281. *SI duo latera anguli recti differant ſpecie, hoc eſt, alterum minus, alterum majus ſit quadrante circuli, hypotenuſa erit quoque major quadrante.*

Nam per Theor., ſi latus unum anguli recti minus ſit quadrante, hypotenuſa ſequitur ſpeciem alterius lateris.

Scholion.

282. SI duo latera anguli recti ita differant ſpecie, ut alterum ſit quadranti æquale, & alterum qua-

quadrante majus, vel minus, hypotenusa erit pariter quadrans; *uti demonstratum est in prima parte Theorematis. Itaque in quovis triangulo sphærico rectangulo, ut decernatur, utrum hypotenusa sit quadrans circuli, satis erit, si alterutrum duorum laterum sit quadrans, quia nulla habeatur ratio alterius lateris.*

Corollarium III.

283. SI *hypotenusa sit quadrante minor, duo latera erunt ejusdem speciei; si quadrante major, duo latera specie differunt.*

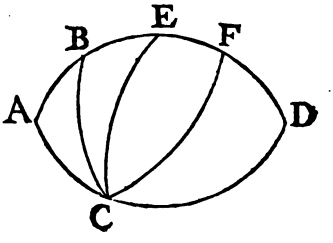
Hæc duo Corollaria sunt Propositiones conversæ præcedentium. Nam in primo casu, si duo latera differrent specie, hypotenusa esset vel major, vel æqualis quadranti circuli (*n.* 281. 282.). In secundo casu, si duo latera essent ejusdem speciei, hypotenusa esset vel minor, vel præcisè æqualis quadranti (*n.* 279. 282.).

Scholion I.

284. SI hypotenusa sit quadrans circuli, necesse est, saltem alterutrum duorum laterum esse quadrantem circuli.

Nam, si duo latera essent vel ambo minora, vel utraque majora, vel alterum minus, & alterum majus quadrante circuli, hypotenusa quoque esset vel minor, vel major quadrante circuli (*n.* 279. 281.).

Itaque in eo casu, in quo hypotenusa æquat arcum 90 graduum, contingere potest, quòd vel duo latera æquent interdum singula quadrantem circuli, vel alterum horum sit quadranti æquale, & alterum majus, minusve. Nam latus, puta, A E, *cùm sit quadrans circuli, ipsius extremitas* E, *opposita angu-*



lo

lo recto, eſt polus alterius lateris (n. 233.); itaque arcus quivis a puncto E *ductus in aliud latus, productum, ſi opus ſit, erit quadrans circuli (n. 233.).*

Quare ex hoc Scholio, & ex n. 282. conſtat, ex tribus lateribus trianguli ſphærici rectanguli fieri non poſſe, ut latus unicum ſit quadrans circuli; ac neceſſe eſſe, ut vel duo ſaltem ſint ſingula quadranti æqualia, vel eorum nullum.

Scholion II.

285. *TRia hæc, quæ ſequuntur Corollaria, reſpondent tribus primis n. 279. 281. 283. Horum demonſtratio ſtatim tibi occurret, ſi modò memineris, angulum quemvis adjacentem hypotenuſæ, eſſe in eadem ſpecie, in qua eſt latus oppoſitum.*

Corollarium IV.

286. *SI anguli adjacentes hypotenuſæ, ſint in eadem ſpecie, hoc eſt, uterque vel acutus, vel obtuſus, hypotenuſa minor erit quadrante circuli.*

Corollarium V.

287. *SI anguli adjacentes hypotenuſæ, ſint in diverſa ſpecie, hoc eſt, alter acutus, & alter obtuſus, hypotenuſa major erit quadrante circuli.*

Corollarium VI.

288. *ET viciſſim, ſi hypotenuſa ſit minor quadrante circuli, duo anguli adjacentes, ſunt ambo in eadem ſpecie. Sin autem hypotenuſa major ſit quadrante, duo anguli adjacentes, erunt in diverſa ſpecie conſtituti, hoc eſt, alter acutus, & alter obtuſus.*

Scholion.

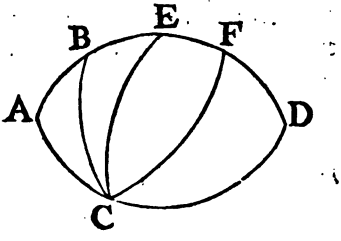
289. SI duo anguli adjacentes hypotenuſæ, ſint ambo recti, vel rectus alter, & alter obliquus, hypotenuſa erit quadrans circuli. *Nam in primo caſu latus utrumque erit quadrans circuli; & in ſecundo, latus angulo recto oppoſitum, pariter erit quadrans circuli* (*n.* 274.).

Et reciprocè, ſi hypotenuſa ſit quadrans circuli; duo anguli adjacentes hypotenuſæ, aut ſaltem alteruter rectus erit. *Nam duo latera, aut ſaltem alterutrum erit quadrans circuli* (*n.* 284.).

Corollarium VII.

290. *IN triangulo rectangulo* BAC, *ſi latus* AÇ, *& angulus* C, *adjacens eidem lateri, & hypotenuſæ, ſint in eadem ſpecie, hoc eſt, vel utrumque majus, vel utrumque minus quadrante circuli, hypotenuſa minor erit quadrante.*

Nam latus AB, oppoſitum angulo C, eſt in eadem ſpecie, in qua eſt idem angulus (*n.* 274.); & conſequenter erit pariter in eadem ſpecie lateris AC; quamobrem hypotenuſa minor erit quadrante circuli.



Scholion.

291. IN triangulo rectangulo, ſi latus, & angulus eidem adjacens, ſint ambo graduum 90, hypotenuſa erit pariter graduum 90. *Nam in hoc caſu latus alterum trianguli erit pariter quadrans circuli; & conſequenter, cùm duo latera anguli recti ſint ſingula 90 graduum, hypotenuſa erit menſura anguli recti* (*n.* 236. 240.); *ac proinde erit quadrans circuli.*

Co-

Corollarium VIII.

292. *SI latus, & angulus adjacens ſint in diverſa ſpecie, hoc eſt, alterum minus, & alterum majus gradibus 90, hypotenuſa major erit quadrante circuli.* Quod conſtat eadem demonſtratione Coroll. VII.

Scholion.

293. SI latus eſſet quadrans circuli, & angulus adjacens obliquus foret, hypotenuſa eſſet quadrans circuli. *Quod conſtat eadem demonſtratione primæ partis hujus Theorematis.*

Corollarium IX.

294. *SI hypotenuſa ſit minor quadrante circuli, latus quodlibet, ejuſque angulus adjacens ſunt in eadem ſpecie.* Et rurſum, *ſi hypotenuſa ſit major quadrante circuli, latus quodlibet, ejuſque angulus adjacens ſunt in diverſa ſpecie.*

Hoc Corollarium continet Propoſitiones inverſas duarum præcedentium; ejuſque veritas conſtat ex III. & VII. Coroll.

Scholion.

295. *SI hypotenuſa æquet quadrantem circuli, latus quodlibet, ejuſque angulus adjacens, eſſe poſſunt ſingula 90 graduum. Fieri etiam poteſt, ut latus quodlibet, ejuſque angulus adjacens ſint in diverſa ſpecie* (*n.* 284.).

Corollarium X.

296. *SI angulus adjacens lateri, minor ſit gradibus 90, erit hoc latus ejuſdem ſpeciei, in qua eſt hypotenuſa.*

Nam I. Si hypotenuſa ſit minor quadrante circuli, latus erit quoque minus; neceſſe eſt e

caſu, quòd latus, & angulus adjacens ſint ejuſdem ſpeciei (*n.* 294.).

II. Si hypotenuſa ſit major quadrante circuli, latus erit quoque majus; nam in hoc caſu oportet, ut latus, & angulus adjacens ſint in diverſa ſpecie.

III. Denique, ſi hypotenuſa ſit quadrans circuli, latus erit quoque quadrans circuli; uti conſtabit ex ſequenti Scholio.

Propter eamdem rationem, ſi latus ſit minus quadrante circuli, angulus adjacens erit in eadem ſpecie, in qua eſt hypotenuſa (*n.* 294.).

Scholion.

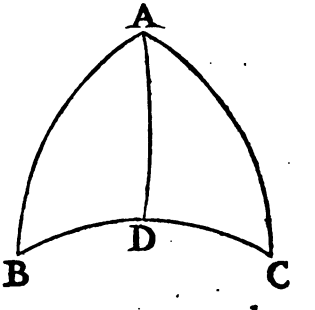
297. QUando angulus adjacens lateri, excedit 90 gradus, vel ab iiſdem deficit, ſi hypotenuſa ſit quadrans circuli, latus erit quoque quadrans circuli (*n.* 284.).

Nam latus alterum eidem angulo oppoſitum, eſt in eadem ſpecie, in qua eſt hujuſmodi angulus (*n.* 274.).

Similiter, quando latus majus eſt, vel minus gradibus 90, ſi hypotenuſa ſit quadrans circuli, angulus adjacens huic lateri, erit rectus; *quippe qui eſt in eadem ſpecie lateris oppoſiti; quod pariter quadrans circuli eſt* (*n.* 274.).

Corollarium XI.

298. *SI tres anguli trianguli* BAC *ſint acuti, tria latera erunt ſingula minora quadrante circuli.*



Ducatur a vertice anguli A arcus perpendicularis AD, qui cadit intra triangulum (*n.* 277.); nam duo anguli ad baſim ſunt in eadem ſpecie. Habebimus ergo trian-

gula

gula rectangula ADB, ADC, quorum hypotenuſæ AB, AC erunt minores ſingulæ quadrante circuli (*n.* 286.); nam anguli adjacentes cuilibet earum, ſunt in eadem ſpecie, ideſt, ambo acuti. Si a vertice B demittatur perpendicularis in AC, eodem modo demonſtrabitur, latus BC minus eſſe quadrante circuli.

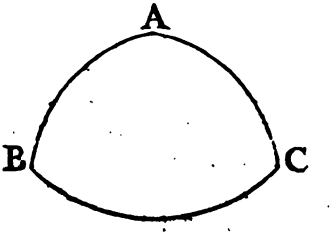
Scholion.

299. *Propoſitio converſa hujus Corollarii non eſt in omni caſu vera. Nam, quamvis tria latera trianguli ſint ſingula minora quadrante circuli, non hinc ſequitur, tres angulos fore acutos; fieri enim poteſt, quòd in triangulo rectangulo latera ſingula ſint minora quadrante circuli; & in hoc caſu hypotenuſa minor quoque erit gradibus* 90 (*n.* 279.).

Corollarium XII.

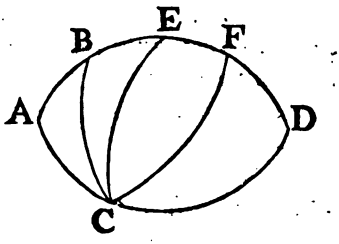
300. *Si tria latera trianguli* BAC *ſint ſingula majora quadrante circuli, tres anguli erunt obtuſi.*

Supponatur deſcribi triangulum alterum, cujus latus quodlibet habeat pro polo aliquem verticem dati trianguli. Hoc poſito, tres anguli ſecundi trianguli ſunt ſupplementa laterum primi (*n.* 255.); & conſequenter horum angulorum ſinguli erunt acuti; ergo latera ſingula hujus ſecundi trianguli erunt pariter minora quadrante circuli (*n.* 298.). Atqui hæc latera ſunt ſupplementa angulorum primi trianguli; ergo hujuſmodi tres anguli ſunt omnes obtuſi.



Scholion.

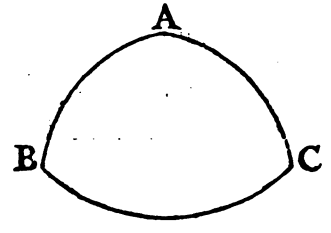
301. *Propoſitio converſa hujus Corollarii non eſt vera in omni caſu; nimirum, quamvis tres anguli trianguli ſint obtuſi, non inde ſequitur, tria latera fore ſingula majora arcu graduum* 90. *Nam, ſi imaginemur triangulum iſoſceles, aut ſaltem proximè, quale eſt* B D C, *rectangulum in* D, *cujus hypotenuſa ſit valde proxima puncto* A, *& conſequenter multò minor quadrante circuli; ac præterea concipiamus, angulum* D *paulo magis aperiri, ut evadat obtuſus; in hoc caſu, cùm aliunde anguli* B *&* C, *adjacentes hypotenuſæ, ſint obtuſi, quippe qui ſunt in eadem ſpecie laterum oppoſitorum; hinc inferri poterit, tres angulos hujus trianguli fore obtuſos, quamvis latus* B C *minus ſit quadrante circuli.*



Corollarium XIII.

302. *Si tria latera trianguli ſingula æquent quadrantem circuli, tres anguli erunt recti.* Nam in hoc caſu angulus quilibet habebit baſim ſuam pro menſura (*n.* 236. 240.); & conſequenter trium angulorum quivis erit rectus.

Et reciprocè, *ſi angulus quivis trianguli* B A C *ſit rectus, tria latera æquant ſingula quadrantem.* Nam, ſi deſcribatur ſecundum triangulum, cujus latera ſingula habeant pro polo aliquem verticem trianguli B A C, hæc latera ſecundi



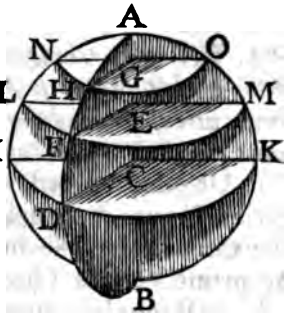
trian-

trianguli erunt ſingula ſupplementum angulorum oppoſitorum primi (*n.* 255.); & conſequenter eadem latera omnia erunt quadrantes circulorum; ergo anguli ſecundi trianguli erunt recti (*n.* 301.); ac proinde latera primi, quæ ſunt ſupplementa angulorum ſecundi (*n.* 255.), erunt totidem quadrantes circuli.

DEFINITIO V.

303. *Sinus*, *Tangens*, & *Secans* alicujus anguli ſphærici LAF, eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcus LF, qui anguli arcus dicitur, vel arcus ID, qui eumdem angulum metitur (*n.* 237. 238. 239.).

Per ſinum intellige tam primum, nempe rectum, quàm ſecundum, & verſum; per tangentem, & ſecantem ſimiliter tam primam, quàm ſecundam.



THEORIA

Sinuum, Tangentium, & Secantium in Triangulo ſphærico rectangulo.

A Triangulo ſphærico rectangulo ordimur theoriam; quippe quæ viam aperiet reſolutioni trianguli ſphærici acutianguli, & obtuſianguli; utì deinceps conſtabit.

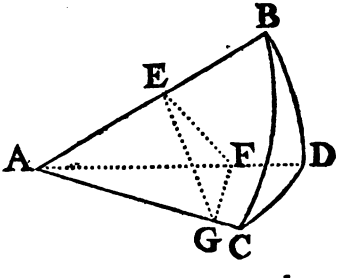
THEOREMA I.

304. *IN omni triangulo ſphærico rectangulo ſinus totus, ſeu radius ſe habet ad ſinum hypotenuſæ, ut eſt ſinus utriuſvis angulorum adjacentium hypotenuſæ, ad latus prædicto angulo oppoſitum.*

Ut planior reddatur demonſtratio, quæ propter varias in unica figura circulorum ſectiones, diverſoſque caſus, ſolet eſſe implexa, partitione erit utendum. Ac primò veritas Theorematis demonſtrabitur in triangulo rectangulo, cujus tria latera ſint ſingula minora quadrante circuli; dein ad reliqua triangula rectangula demonſtratio eadem facilè transferri poterit.

Caſus I.

ESto pyramis triangularis ABCD, terminata a triangulo ſphærico BDC, rectangulo in D, cujus tria latera DB, DC, BC ſint ſingula minora quadrante; ac proinde duo anguli adjacentes hypotenuſæ, erunt acuti; quippe qui ſequuntur ſpeciem laterum oppoſitorum (*n.* 274.).



In plano ſectoris CAD ducatur recta GF, perpendicula-

cularis ſectori BAD, qui facit angulum rectum BDC cum primo ſectore per hyp.; hæc linea GF erit quoque perpendicularis rectæ AD, quæ eſt communis interſectio horum duorum ſectorum.

His poſitis, concipiatur planum, quod tranſeat per puncta F & G, quodque ſit perpendiculare ipſi AB: habebitur triangulum EFG, cujus latera ſunt interſectiones hujus plani cum tribus ſectoribus pyramidis. Reliquum jam eſt, ut demonſtretur, *radium ſphæræ, ſeu ſinum totum eſſe ad ſinum hypotenuſæ* BC, *utì ſinus anguli* B *eſt ad ſinum lateris* DC, *eidem angulo oppoſiti*; vel etiam, *utì ſinus anguli* C *eſt ad ſinum lateris* DB; quod compendioſiùs ſic exprimimus:

R:S—BC::S—B:S—DC, vel, ::S—C:S—DB.

Demonſtratio. Triangulum AFG, rectangulum in F, dabit, AG:R::FG:S—FAG.

Rurſum angulus EFG rectus eſt; quia FG perpendicularis eſt plano BAD, ac proinde etiam rectæ EF, quæ eſt in eodem plano; Quare in triangulo rectangulo EFG habebitur, GE:R::FG:S—GEF.

Prima proportio dabit hanc æquationem:

AG×S—FAG=R×FG.

Secunda proportio hanc aliam:

GE×S—GEF=R×FG.

Cùm autem duo poſtrema harum æquationum membra exhibeant idem productum R×FG, erunt duo prima inter ſe æqualia, nimirum,

AG×S—FAG=GE×S—GEF;

ex qua elicitur, AG:GE::S—GEF:S—FAG.

Præterea triangulum AEG eſt rectangulum in E; nam planum EFG perpendiculare eſt rectæ AB per hyp. Itaque AG:GE::R:S—EAG.

Cùm autem prima ratio harum duarum proportionum ſit utrobique eadem, habebitur,

R:S—EAG::S—GEF:S—FAG.

Atqui S—EAG idem prorſus eſt, ac S—BC; nam arcus BC eſt menſura anguli A; aliunde S—GEF eſt pariter idem, ac S—DBC; nam angulus GEF eſt menſura anguli ſectorum BAC, BAD; cùm planum EFG ſupponatur perpendiculare communi ſectioni AB horum duorum ſectorum; denique quartus terminus S—FAG æqualis eſt S—DC; Quare ultima proportio ad hanc reducitur:

S—BDC, ſeu R:S—BC::S—DBC:S—DC.

Quod erat primum.

Eodem modo demonſtrabitur pars altera Theor., nimirum, R:S—BC::S—DCB:S—DB; ſi ſupponatur EF perpendicularis ſectori CAD, & proinde interſectioni AD, ac præterea planum EFG perpendiculare interſectioni AC. In hoc caſu, a triangulo AFE, rectangulo in F, deducetur hæc proportio:

AE:R::EF:S—EAF;

& a triangulo EFG hæc altera proportio:

GE:R::EF:S—EGF.

Prima dabit hanc æquationem:

AE×S—EAF=R×EF;

Secunda dabit hanc aliam:

GE×S—EGF=R×EF.

Ergo AE×S—EAF=GE×S—EGF;

atque hinc AE: GE ::S—EGF:S—EAF.

Jam verò propter triangulum AGE, rectangulum in G, habebitur, AE: GE :: R :S—EAG;

Ergo R:S—EAG::S—EGF:S—EAF;

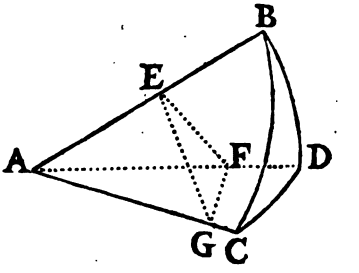
hoc eſt, R:S—BC ::S—DCB:S—DB.

Quod erat alterum.

Scholion.

305. *HÆc demonſtratio ſupponit, tria latera trianguli ſphærici* BDC, *ſingula minora eſſe quadrante. Nam, ſi latus* BC *eſſet aut æquale, aut majus quadrante, angulus* A *eſſet rectus, aut obtuſus; & conſequen-*

quenter triangulum EAG *esse non posset rectangulum neque in* E, *neque in* G. *Similiter, si latus* DB *esset* 90 *graduum, aut etiam major, angulus* BAD *esset rectus, aut obtusus; quare triangulum* AEF *non posset esse rectangulum in* E. *Denique, si angulus* B, *aut* C *esset rectus, vel obtusus, angulus in* E, *aut in* G, *esset ejusdem magnitudinis; & consequenter angulus* EFG *non posset esse rectus.*

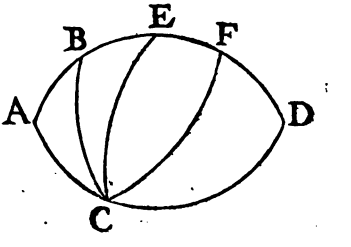


Itaque, ut veritas Theorematis universalis sit, reliqui etiam casus recensendi, ac demonstrandi.

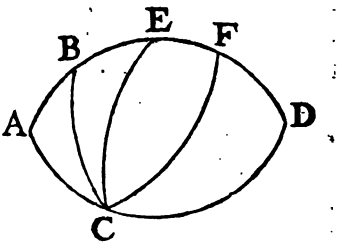
Casus II.

306. SInt duo latera trianguli BDC rectanguli in D, singula majora quadrante: anguli B & C erunt obtusi; nam sequuntur speciem laterum oppositorum. In hoc casu proportio Theorematis locum habebit.

Quod apertè constabit, si consideretur triangulum oppositum BAC, conflatum ex arcubus DB, DC, productis usque ad concursum in A. Latera hujus trianguli sunt singula minora quadrante circuli; quippe quæ sunt supplementa laterum primi (*n.* 242.); itaque anguli ABC, ACB hujus trianguli erunt acuti; sunt enim supplementa angulorum B & C primi trianguli; aliunde hypotenusa BC minor est quadrante; duo quippe latera sunt ejusdem speciei. Quamobrem partium



omnium trianguli BAC aliæ ſunt æquales, & aliæ ſunt ſupplementa partium trianguli BDC; hinc ſinus partium in uno ſunt prorſus iidem, ac ſinus partium reſpondentium in altero triangulo. Jam verò in triangulo BAC, cujus omnia latera ſunt minora quadrante, per caſum præced. habetur hæc proportio: R:S—BC::S—ABC:S—AC,



aut etiam, ::S—ACB:S—AB.

Ergo in triangulo BDC erit quoque

R:S—BC::S—DBC:S—DC,

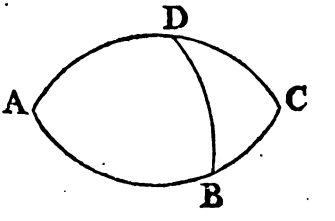
vel, ::S—DCB:S—DB.

Scholion.

Si ponantur obtuſi anguli B & C, *adjacentes hypotenuſæ, duo latera erunt quoque majora quadrante* (*n.* 274.); *atque adeo hic caſus recidit in præcedentem.*

Caſus III.

307. IN triangulo ADB, rectangulo in D, ponatur latus DA majus, & latus DB minus quadrante. Anguli A & B ſequentur ſpeciem laterum poſitorum (*n.* 274.); & hypotenuſa AB major erit quadrante (*n.* 281.).



In hoc caſu producatur hypotenuſa AB versùs partem anguli obtuſi, donec occurrat lateri AD pari-

ter

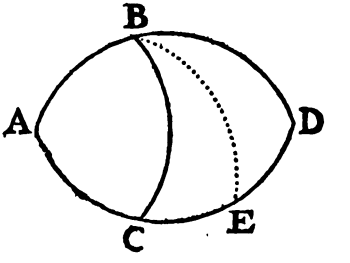
ter producto: habebitur triangulum aliud oppositum BDC, rectangulum in D, cujus omnia latera sunt minora quadrante; nam duo arcus ABC, ADC sunt singuli æquales semicircumferentiæ; & anguli DBC, DCB sunt acuti (*n.* 274.); hinc partes secundi trianguli erunt aliæ æquales partibus primi, & aliæ, earum supplementa; & consequenter iidem erunt sinus partium respondentium in uno, atque altero triangulo. Atqui per Casum I. in triangulo BDC obtinetur hæc proportio: R:S—BC::S—DBC:S—DC,
vel, ::S—DCB:S—DB.
Ergo pariter in triangulo ADB erit
R:S—AB::S—DBA:S—DA,
vel, ::S—DAB:S—DB.

Scholion.

SI anguli adjacentes hypotenusæ, ponantur in diversa specie, obtusus unus, acutus alter, etiam latera sequentur illorum speciem; ac proinde hic casus in eumdem revolvitur.

Casus IV.

308. IN triangulo BDC, rectangulo in D, si supponantur duo latera DB, DC æqualia quadranti circuli, hypotenusa BC erit mensura anguli recti (*n.* 236. 240.); & consequenter erit 90 graduum. Aliunde tres anguli erunt recti (*n.* 302.); hinc sinus omnes sive angulorum, sive laterum, erunt æquales; quippe qui æquantur singuli radio, seu sinui totali. Itaque habebitur proportio Theorematis, cujus omnes termini in hoc casu erunt æquales.



Scho-

Scholion.

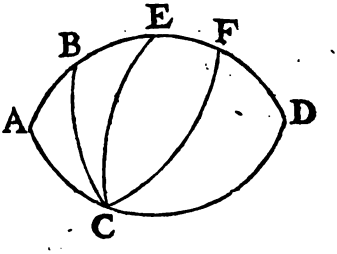
SI duo anguli adjacentes hypotenuſæ, ponantur recti, obtinebitur eadem proportio. Cùm enim tres anguli tunc ſint recti, tria latera erunt quadrantes circuli (*n.* 302.).

Caſus V.

309. INvenietur quoque proportio Theorematis in triangulo rectangulo EAC, cujus unum latus AE ponatur graduum 90; tunc enim hypotenuſa EC erit pariter quadrans circuli (*n.* 282.); & angulus ACE, oppoſitus lateri 90 graduum, eſt rectus (*n.* 274.). Præterea latus AC eſt menſura anguli oppoſiti AEC; nam punctum E eſt polus arcus AC. Ergo habebitur, R:S—EC::S—AEC:S—AC, vel, ::S—ACE:S—AE. Termini primæ rationis ſunt æquales inter ſe, quemadmodum termini ſecundæ in utraque proportione.

Scholion.

SI ſupponatur hypotenuſa EC *quadrans circuli, alterutrum duorum laterum, puta,* AE, *erit pariter quadrans circuli* (*n.* 284.). *Vel, ſi ponatur rectus angulus* ACE *adjacens hypotenuſæ, latus oppoſitum* AE *erit pariter quadrans circuli* (*n.* 274.); *adeoque hi duo caſus in præcedentem recidunt.*



Univerſaliter jam conſtat, in omni triangulo ſphærico rectangulo radium ſphæræ ſe habere ad ſinum hypotenuſæ, ut eſt ſinus utriuſvis angulorum reliquorum ad ſinum cruris prædicto angulo oppoſiti.

Co-

Corollarium.

310. HInc ſinus angulorum proportionales ſunt ſinibus laterum oppoſitorum.

Scholion.

311. TRes *ſunt caſus, in quibus triangulum rectangulum habere poteſt partes, quæ excedant gradus* 90. *Primus eſt, quando duo latera ſunt ſingula majora quadrante; Secundus eſt, quando latus unum majus eſt, & alterum minus quadrante; Tertius denique, quando latus unum majus, & alterum æquale quadranti.*

In primis duobus caſibus vidimus n. 306. 307., *concipi poſſe triangulum primo oppoſitum, cujus aliquæ partes ſint ſupplementa illarum, quæ excedunt gradus* 90 *in primo triangulo, & aliæ partes ſint æquales partibus reſpondentibus in primo; ita ut ſinus, & tangentes partium ſecundi, ſint pariter ſinus, & tangentes partium reſpondentium in primo.*

Idem dici poteſt in tertio caſu. Nam in triangulo EDC, *rectangulo in* D, *ſi ponatur latus* CD *majus* 90 *gradibus, & alterum* ED *æquale quadranti; in hoc caſu latus* CD *eſt ſupplementum lateris* AC *alterius trianguli oppoſiti* EAC; *angulus obtuſus* DEC *eſt pariter ſupplementum anguli acuti* AEC; *& reciprocè. Præterea partes reliquæ trianguli* EAC *ſunt æquales partibus reſpectivis trianguli* EDC. *Conſtat itaque propoſitum.*

THEOREMA II.

312. IN *omni triangulo ſphærico rectangulo radius eſt ad ſinum alterutrius lateris, uti tangens anguli intercepti ab eodem latere, & hypotenusæ, eſt ad tangentem lateris oppoſiti.*

Hæc analogia demonſtranda nobis eſt in triangulo rectan-

rectangulo, cujus tria latera ſint ſingula minora quadrante circuli; deinde eamdem convenire demonſtrabimus reliquis triangulis rectangulis, excepto caſu trianguli, in quo dumtaxat latus unum, & hypotenuſa æquentur quadranti circuli.

Demonſtratio. Dico itaque

R: S—DB ::T—DBC: T—DC.

Cùm enim, juxta conſtructionem Theorematis præcedentis, planum trianguli EFG, rectanguli in F, ſit perpendiculare lineæ AB, erit triangulum AEF rectangulum in E; hinc habebitur hæc proportio:

AF: R :: EF :S—EAF.

Similiter triangulum AFG, rectangulum in F, dabit hanc analogiam, utì conſtat ex prima parte Trig. planæ:

AF: R :: FG :T—FAG;

Ergo EF: FG ::S—EAF:T—FAG.

Atqui in triangulo EFG, pariter rectangulo in F, ex dictis in prima parte Trig., invenitur,

EF: FG :: R :T—FEG;

Ergo R:T—FEG::S—EAF:T—FAG;

& alternando, R: S—EAF::T—FEG:T—FAG;

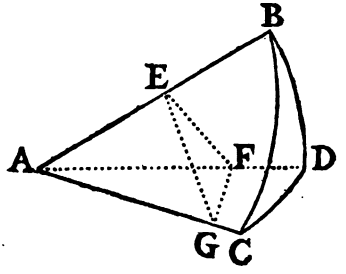
vel, R: S—DB ::T—DBC:T—DC.

Quod erat &c.

Similiter demonſtrabitur,

R: S—DC ::T—DCB:T—DB.

Neque aliud ſupponi debet in conſtructione, quàm rectam EF perpendicularem eſſe ſectori DAC, & conſequenter interſectioni AD, ac præterea planum trianguli EFG perpendiculare rectæ AC.



Co-

Corollarium.

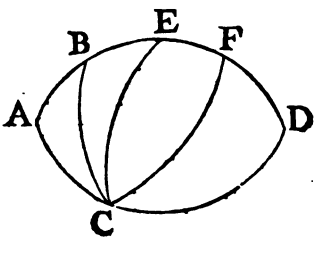
313. QUemadmodum in Theoremate præcedenti, demonſtrabitur eamdem analogiam habere locum, I. quando duo crura anguli recti ambo majora ſunt quadrante; II. quando duorum laterum alterum majus eſt quadrante, & alterum minus; III. quando duo latera æquantur ſingula quadranti. In hoc tertio caſu duo termini primæ rationis erunt inter ſe æquales, quemadmodum termini ſecundæ. Verùm iſti duo termini non aliter exprimi poterunt, quàm per numeros infinitos; nam tangens arcus, ſeu anguli 90 graduum, eſt infinita.

Denique, ſi latus unum anguli recti ſit quadrans circuli, & latus alterum majus, minuſve, utì in triangulo EAC, rectangulo in A, in quo latus AE eſt quadrans circuli, & hypotenuſa EC erit pariter quadrans (*n.* 284.), & latus AC erit menſura anguli oppoſiti E; tum habebitur etiam proportio:

R : S — AE :: T — AEC : T — AC.

Nam termini primæ rationis ſunt inter ſe æquales, utì & termini ſecundæ. Verùm in hoc caſu dici non poterit, R : S — AC :: T — ACE : T — AE; duo quippe ultimi termini ſunt utique æquales; at duo primi nequaquam.

His animadverſis, quando latus unum anguli recti eſt quadrans circuli, & alterum majus, minuſve, dici quidem poteſt, *radium eſſe ad ſinum lateris 90 graduum, utì tangens anguli intercepti ab hoc latere, & hypotenusæ, eſt ad tangen-*

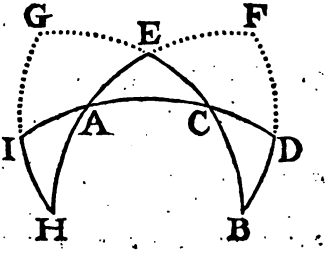


tem lateris oppoſiti. At dici nequaquam poteſt, *radium eſſe ad ſinum lateris minoris, vel majoris quadrante, uti tangens anguli intercepti ab hoc latere & hypotenusâ, eſt ad tangentem lateris oppoſiti*.

LEMMA.

314. *DAto triangulo rectangulo* BDC, *cujus latera omnia ſint ſingula minora quadrante circuli*, I. *Si producatur hypotenuſa* BC, *& latus* DC, *hac lege, ut productiones* CG, CI *ſint quadrantes circuli*; II. *Si producatur ſimiliter latus* BD *in* F; *ac fiat* BF *quadrans circuli*; III. *Si denique a polo* B *ducatur arcus* FEH: *habebuntur nova triangula rectangula* AEC, AIH, *quorum partes erunt æquales partibus trianguli* BDC, *aut earum complementis*.

Demonſtratio. Quoniam arcus FEH habet polum B, erunt duo arcus BF, BE quadrantes circuli, perpendiculares arcui FEH; hinc angulus AEC eſt rectus. Similiter, quia punctum C eſt polus arcus GIH, duo arcus CG, CI ſunt quadrantes circuli, perpendiculares arcui GIH; ergo angulus AIH eſt pariter rectus. Præterea, cùm arcus AF habeat pro polo punctum B, & arcus AD angulum rectum efficiat in D, erunt ambo perpendiculares arcui BDF; & conſequenter punctum A erit ejuſdem arcus BDF polus (*n*. 232.); ergo AD, AF ſunt quadrantes circuli. Denique, cùm duo arcus EH, GH ſint perpendiculares arcui CG, punctum occurſus H eſt polus ejuſdem arcus; ac duo arcus EH, GH ſunt quadrantes circuli. His poſitis, reliquum eſt, ut oſtendam, nova hæc triangula rectangula AEC, AIH habe-



re

re partes æquales partibus trianguli BDC, aut earum complementis.

I. Reſpectu trianguli AEC, rectanguli in E, conſtat, hypotenuſam AC eſſe complementum lateris DC; quia AD eſt quadrans circuli; latus AE eſt complementum lateris EF; quod metitur angulum B; latus alterum CE eſt complementum hypotenuſæ BC; nam BE eſt quadrans; angulus CAE habet pro menſura arcum DF, complementum lateris BD, propter quadrantem circuli BF; denique angulus ACE æquatur angulo BCD.

II. Quantùm attinet ad triangulum AIH, rectangulum in I, hypotenuſa AH æquatur arcui EF, qui metitur angulum B; nam iſti duo arcus habent idem complementum AE. Rurſum latus AI æquatur lateri CD, propter commune complementum AC; latus alterum IH eſt complementum arcus GI, qui metitur angulum C; angulus IAH habet pro menſura arcum DF, complementum lateris BD; denique angulus H habet pro menſura arcum EG, æqualem hypotenuſæ BC, propter commune complementum CE.

Scholion.

Quæ ſequuntur Corollaria, ab hoc Lemmate deducuntur, & ab aliquo Theorematum præcedentium; nimirum, ſex prima a Theoremate I. n. 304., *ejuſque Coroll.; & reliqua quatuor a Theor. II. n.* 312.

Corollarium I.

315. TRiangulum AEC, rectangulum in E, dat hanc analogiam:

R : S — AC :: S — ACE : S — AE.

Atque hinc in triangulo BDC rectangulo in D, habebitur

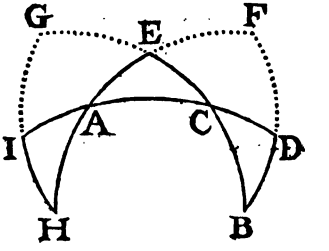
R : cos — DC :: S — C : cos — B.

Similiter R : cos — DB :: S — B : cos — C.

ſive alternando, R:S—B::cos—DB:cos—C.
Nimirum, *radius, ſeu ſinus totus*
ad ſinum anguli adjacentis hypotenuſæ;
Uti coſinus lateris, cui adjacet idem angulus,
ad coſinum anguli oppoſiti huic lateri.

Corollarium II.

316. IDem triangulum AEC dat pariter,
R: S—AC :: S—CAE:S—CE.
Ergo in triangulo BDC habebitur,
R:cos—DC:: cos—DB :cos—BC.
Nimirum, *ſinus totus*
ad coſinum unius lateris;
Uti coſinus alterius lateris
ad coſinum hypotenuſæ.



Corollarium III.

317. TRiangulum AEC hanc etiam analogiam exhibet (*n.* 311.):
S—CAE: S—CE::S—ACE:S—AE.
Ergo in triangulo BDC invenietur,
cos—DB:cos—BC:: S—C :cos—B.
Habebitur quoque (*n.* 325.),
cos—DC:cos—BC:: S—B :cos—C.

Corollarium IV.

318. TRiangulum AIH, rectangulum in I, dat hanc analogiam:
R: S—AH ::S—IAH:S—IH.
Itaque in triangulo BDC, rectangulo in D, habebitur,
R:

R:S—B::cos—DB:cos—C.

Hoc Corollarium recidit in primum.

Corollarium V.

319. TRiangulum AIH dat pariter
R:S—AH::S—AHI:S—AI.
Ergo in triangulo rectangulo BDC, invenietur,
R:S—B ::S—BC :S—DC.
Erit quoque (*n.* 325.)
R:S—C ::S—BC :S—DB.

Corollarium VI.

320. TRiangulum AIH dat etiam
S—IAH: S—IH::S—AHI:S—AI.
Quare in triangulo BDC invenietur,
cos—DB :cos—C ::S—BC :S—DC.
Habebitur quoque (*n.* 325.)
cos—DC :cos—B ::S—BC :S—DB.

Corollarium VII.

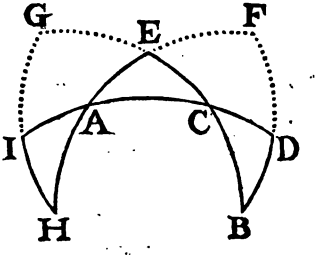
321. IN triangulo AEC, rectangulo in E, invenietur (*n.* 312.),
R: S —AE:: T —CAE: T —CE.
Itaque in triangulo rectangulo BDC, erit
R:cos—B ::cot—DB :cot—BC;
vel R:cot—DB::cos—B :cot—BC.
Habebitur quoque (*n.* 325.)
R:cos—C ::cot—DC :cot—BC;
Hoc eſt, *ſinus totus*
ad coſinum anguli adjacentis uni lateri;
Uti cotangens hujus lateris,
ad cotangentem hypotenuſæ.

Corollarium VIII.

322. IDem triangulum AEC dat pariter
R: S—CE::T—ACE: T—AE.
Ergo in triangulo BDC habebitur
R:cos—BC::T—C :cot—B.
Habebitur quoque (*n.* 325.)
R:cos—BC:: T—B :cot—C;
Nimirum, *ſinus totus*
ad coſinum hypotenuſæ;
Uti tangens anguli adjacentis hypotenuſæ,
ad cotangentem alterius anguli ejuſdem hypotenuſæ.

Corollarium IX.

323. IN triangulo AIH invenietur (*n.* 312.),
R: S—IH::T—AHI:T—AI.
Ergo in triangulo BDC habebitur
R:cos—C ::T—BC :T—DC.
Erit quoque R:cos—B ::T—BC :T—DB.
Hæ duæ analogiæ locum habere poſſunt in iiſdem circumſtantiis Coroll. VII.



Corollarium X.

324. DEnique in triangulo AIH reperietur pariter,
R: S—AI:: T—IAH: T—IH.
In triangulo BDC erit quoque
R: S—DC::cot—DB :cot—C;
vel R:cot—DB:: S—DC :cot—C;
vel denique R: S—DB::cot—DC :cot—B.

Mo-

Monitum I.

325. *SI quando in aliqua analogia habeantur termini alicujus trianguli, qui ſint ejuſdem nominis cum aliis terminis ejuſdem trianguli, hi ultimi ſubſtitui poterunt primis in analogia. Quamobrem in triangulo rectangulo ſubſtitui poterit latus unum, & angulus huic oppoſitus, loco alterius lateris, & anguli oppoſiti huic ſecundo lateri; ſimiliter ſubſtitui poterit latus, & angulus adjacens, loco alterius lateris, ſuique anguli adjacentis.*

Illa tamen cautio diligenter habenda eſt, quòd, ſi tres fuerint in aliqua proportione hujuſmodi partes, quæ alias ejuſdem nominis habeant in eodem triangulo, vel tres omnes erunt permutandæ, vel earum neutra; quod ſi duæ dumtaxat habeantur, ambæ pariter permutandæ ſunt.

Eſto hæc analogia, R : cos — DC :: S — C : cos — B :
ſubſtitui poterit R : cos — DB :: S — B : cos — C.
Pariter in analogia R : S — B :: S — BC : S — DC,
ſubſtitui poterit R : S — C :: S — BC : S — DB.
Radius & S — BC manent iidem; quippe qui non habent in eodem triangulo alias partes ejuſdem nominis, quàm illas, ad quas pertinent.

Ratio hujus Moniti eſt planè evidens. Nam in conſtructione trianguli BCD, *variari potuiſſet valor laterum* DB, DC; *nimirum, ſi* DB *eſt grad.* 65, & DC *grad.* 60, *fieri potuiſſet* DB *grad.* 60, & DC *grad.* 65; *ac ſimiliter permutari potuiſſet valor angulorum* B & C, *manente ſemper vera proportione.*

Præterea produci poſſent CB, DB *versùs* B, & DC *versùs* A; & *duo triangula* AEC, AIH *orirentur ultra* B. *In hoc caſu deduci potuiſſent analogiæ, de quibus agitur in hoc Monito, loco illarum, quæ deductæ ſunt in I. & V. Corollario.*

Monitum II.

326. *HÆc Corollaria non utique reſpiciunt triangula rectangula, in quibus latus aliquod, aut aliquis angulus adjacens hypotenuſæ, contineat 90 gradus; nam Lemma, ex quo hæc Corollaria deducta ſunt, poſtulat, ut omnes partes trianguli rectanguli ſint minores gradibus 90, excepto angulo, qui triangulum rectangulum conſtituit.*

Verùm analogiæ, quæ in hiſce decem Corollariis continentur, aptari poſſunt reliquis omnibus triangulis rectangulis; quamvis ſuarum partium aliquæ excedant gradus 90. Nam dato hujuſcemodi triangulo, concipi ſemper poterit aliud primo oppoſitum, cujus aliquæ partes æquentur iis partibus primi, quæ ſunt minores gradibus 90, & reliquæ partes ſint ſupplementa earum partium primi, quæ ſunt majores gradibus 90; uti jam expoſitum eſt n. 306. 307. 308. 309.

Monitum III.

327. *IN ſequenti Problematum ſerie ſatius duco, uti dumtaxat ſex diverſis analogiis, quæ continentur in Theor. I. & II. & in quatuor ex immediatè præcedentibus Corollariis, nimirum, in I. II. VII. & VIII. Ut autem unico obtutu comprehendi faciliùs poſſint, & memoriâ retineri, juvabit ſex haſce analogias propter uſum inſignem, generatim ſubjicere, nullis adhibitis figuris, ut promptiùs Tironibus occurrant.*

328. In omni triangulo ſphærico rectangulo
Sinus totus, ſeu radius
eſt ad ſinum hypotenuſæ;
Ut ſinus utriuſvis angulorum adjacentium hypotenuſæ,
eſt ad latus prædicto angulo oppoſitum.
Theor. I. n. 304.

329.

329. *Radius, ſeu ſinus totus*
eſt ad ſinum alterutrius lateris;
Uti tangens anguli intercepti ab eodem latere, & hyp.,
eſt ad tangentem lateris oppoſiti.
Theor. II. n. 312.

330. *Sinus totus*
eſt ad ſinum anguli adjacentis hypotenuſæ;
Uti coſinus lateris, cui adjacet idem angulus,
eſt ad coſinum anguli oppoſiti huic lateri.
Coroll. I. n. 315.

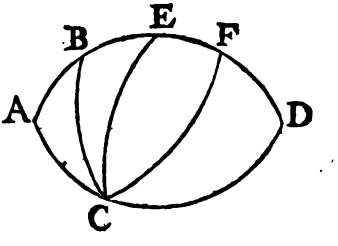
331. *Sinus totus*
eſt ad coſinum unius lateris;
Uti coſinus alterius lateris
eſt ad coſinum hypotenuſæ.
Coroll. II. n. 316.

332. *Sinus totus*
eſt ad coſinum anguli adjacentis uni lateri;
Uti cotangens hujus lateris
eſt ad cotangentem hypotenuſæ.
Coroll. VII. n. 321.

333. *Sinus totus*
eſt ad coſinum hypotenuſæ;
Uti tangens anguli adjacentis hypotenuſæ,
eſt ad cotangentem alterius anguli ejuſdem hypotenuſæ.
Coroll. VIII. n. 322.

THEOREMA III.

334. *IN triangulo ſphærico* EAC, *rectangulo in* A, *ſi latus unum* AE *ſit quadrans circuli, latus alterum* AC *tot gradus continet, quot angulus oppoſitus* AEC.



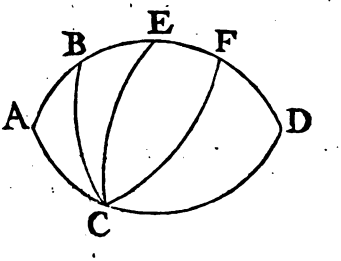
Demonſtratio. Nam in hoc caſu punctum E eſt polus arcus AC, propter an-

gulum rectum EAC; & conſequenter latus AC eſt menſura anguli AEC (*n.* 309.). Quod erat &c.

THEOREMA IV.

335. ET viciſſim, *ſi in eodem triangulo latus unum, minus, aut majus quadrante circuli, contineat totidem gradus, quot angulus oppoſitus, latus alterum erit quadrans circuli.*

Demonſtratio. Eſto triangulum AEC, in quo latus AC ſit totidem graduum, quot graduum eſt angulus oppoſitus AEC: Dico latus alterum AE eſſe non poſſe neque minus, neque majus quadrante circuli. Nam I., ſi minus eſſet, &, puta, AF eſſet quadrans, hypotenuſa quoque CF eſſet quadrans (*n.* 282.); & conſequenter latus AC eſſet totidem graduum, quot angulus oppoſitus AFC; quare hic angulus AFC æquaretur primo AEC; quod fieri non poteſt; nam, ſi iſti duo anguli eſſent æquales, ſumma laterum CE, CF trianguli ECF, æquaretur ſemicircumferentiæ (*n.* 272.); quamobrem ſicuti latus CF eſt quadrans circuli ex ſequela hypotheſis, latus alterum CE erit quoque quadrans. Atqui hypotenuſa CE trianguli rectanguli EAC, non eſt quadrans circuli per ſuppoſitionem; alioquin latus AE, contra hypotheſim, eſſet ſimiliter quadrans (*n.* 284.); conſtat itaque propoſitum.



Eodem modo demonſtrabitur, latus AE non eſſe majus quadrante, ſi per extremitatem B arcus AB, qui ponatur æqualis quadranti, ducatur arcus CB. Quod erat reliquum.

Scho-

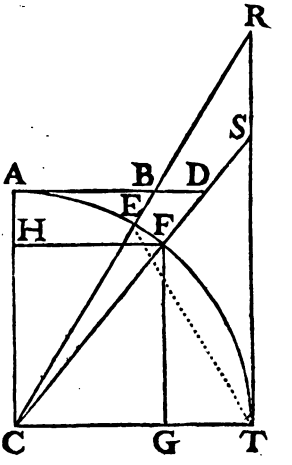
Scholion.

Conſtabit deinceps n. 350., *triangulum rectangulum, cujus latus unum majus, minuſve quadrante circuli, ſit menſura anguli oppoſiti, reliquas quatuor partes habere ſingulas graduum* 90.

Hæc autem duo, quæ ſubdo, Theoremata, uſui ſunt, ut deducantur aliquæ analogiæ ex iis, quæ aliunde jam demonſtratæ ſunt.

THEOREMA V.

336. *Radius, ſeu ſinus totus, eſt medius proportionalis inter ſinum arcus, & coſecantem ejuſdem arcus, ſive ſecantem ſui complementi.*



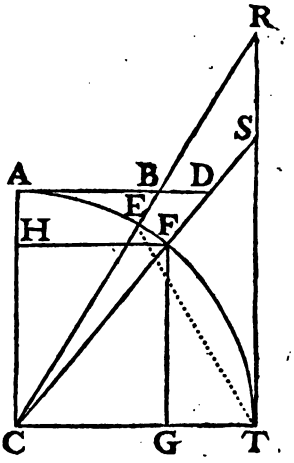
Demonſtratio. Aſſumatur arcus FT, cujus complementum eſt AF: Dico radium, ſeu ſinum totum, eſſe medium proportionalem inter FG ſinum arcus FT, & CD ſecantem complementi AF. Nam FG = CH; jam verò CH: CA::CF, ſeu CA:CD, propter ſimilia triangula rectangula CHF & CAD. Quod &c.

Scholion.

337. *Conſtat jam ex hoc Theoremate, quòd, ſi in aliqua analogia duo termini unius rationis ſint ſinus arcus, & ſinus totus, ſubſtitui iiſdem poterit ſinus totus, & coſecans ejuſdem arcus.*

THEOREMA VI.

338. *Tangentes duorum arcuum, vel duorum angulorum ſunt inter ſe reciprocè, ut eorum cotangentes, ſive reciprocè, utì tangentes ſuorum complementorum.*



Demonſtratio. Sint duo arcus AE, AF, quorum tangentes ſint AB, AD. Complementa horum arcuum ſunt TE, TF, quorum tangentes ſunt TR, TS; Dico autem

AB:AD::TS:TR.

Nam duo triangula rectangula CAB, RTC ſunt ſimilia, propter angulos alternos ACB, TRC;

hinc AB : CT :: CA : TR.

Rurſum duo triangula CAD, STC pariter ſimilia, dabunt AD : CT :: CA : TS.

Prima proportio exhibet AB×TR=CT×CA;

Secunda proportio dat AD×TS=CT×CA.

Ergo AB×TR=AD×TS;

atque hinc AB : AD :: TS : TR.

Quod erat &c.

Scholion.

339. *SI quando in aliqua analogia duo termini unius rationis ſint duæ tangentes, ſubſtitui poterunt biſce terminis cotangentes, ſeu tangentes complementorum, quæ ſumantur in ordine inverſo.*

Analyſis Trianguli ſphærici rectanguli.

340. TRiangulum omne ſex habet partes, tria latera, & tres angulos; harum partium tres notas eſſe oportet, ut reliquæ inveniantur. Verùm tres datæ partes combinari poſſunt inter ſe ſex pariter diverſis modis, quos explicare aggredimur reſpectu trianguli ſphærici rectanguli, in quo angulus rectus ſemper eſt unum trium datorum; duæ reliquæ partes erunt

I. vel duo latera, quæ angulum rectum continent;
II. vel alterutrum laterum, & hypotenuſa;
III. vel alterutrum laterum, & angulus adjacens;
IV. vel alterutrum laterum, & angulus eidem oppoſitus;
V. vel hypotenuſa, & alteruter angulorum adjacentium;
VI. vel denique duo anguli adjacentes hypotenuſæ.

Harum combinationum quælibet tres habet caſus, exceptà primà, & ultimà, quæ duos dumtaxat quælibet caſus habet. Itaque reſolutio trianguli ſphærici rectanguli ſexdecim caſus complectitur; quos omnes recenſeam, & demonſtrabo.

PROBLEMA I.

341. *DAtis duobus cruribus, invenire I. duos angulos iiſdem oppoſitos, II. hypotenuſam.*

Caſus I. Ecce tibi analogiam, ut inveniatur alteruter angulorum adjacentium hypotenuſæ; quæ eſt inverſa illius, quam explicavimus n. 312. Fiat:

Ut ſinus lateris adjacentis angulo quæſito,
ad ſinum totum;
Ita tangens alterius lateris,
ad tangentem hujus anguli;
qui erit in eadem ſpecie lateris oppoſiti (*n.* 274.).

Caſus II. Ut invenias hypotenuſam, uſui erit analogia n. 316. *Sinus totus*
eſt ad coſinum unius duorum laterum;

Ut

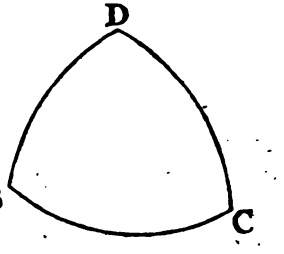
Uti cosinus alterius lateris
est ad cosinum hypotenusæ;
quæ erit major, minorve quadrante circuli, prout duo latera fuerint ejusdem, aut diversæ speciei (*n.* 279.). Quod si alterutrum duorum laterum, aut duo latera æquarent singula quadrantem circuli, hypotenusa esset pariter quadrans circuli (*n.* 280. 282.).

Scholion.

PRo logarithmicis autem operationibus in memoriam sunt revocanda præcepta generalia, tradita in secunda parte hujus Operis.

Exemplum I.

ESto triangulum BDC, rectangulum in D, cujus latus unum DB sit $66^{\circ}, 24'$, & latus alterum DC, $76^{\circ}, 24'$. Invenietur ope sequentis calculi angulus B $= 77^{\circ}, 30'$, & hypotenusa BC $= 84^{\circ}, 36'$.



Inventio anguli B.

Subſtitutis logarithmis in prima analogia, fiat

1000000 logarithmus ſinus totius;
1061632 log. tangentis lateris oppoſiti DC $76^{\circ}, 24'$.
2061632 ſumma.
996207 logar. ſubd. lateris adjacentis DB $66^{\circ}, 24'$.
1065425 reſiduum pro log. tang. $77^{\circ}, 30'$ anguli B.

Similiter ex analogia Caſus I. reperietur angulus C $67^{\circ}, 0'$, ſeu potiùs $66^{\circ}, 59' \frac{1}{2}$.

Ratio

Ratio totius operationis pendet ex theoria logarithmorum. Nam in adducto exemplo, logarithmi ſubſtituti tribus primis terminis prioris analogiæ, ſunt 996207, 1000000, 1061632; addantur duo medii; & a ſumma ſubducatur primus: reſiduum dabit logarithmum tangentis anguli quæſiti B.

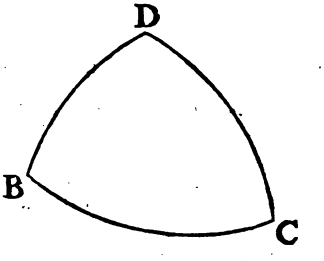
Inventio hypotenuſæ BC.

Subſtitutis logar. in ſecunda analogia, accipiatur

960244 logarithmus cof. DB 66° 24′;
937133 log. cof. DC 76° 24′.
1897377 ſumma.
1000000 log. ſubducendus ſinus totius.
897377 reſiduum pro log. cof. hyp. BC 84° 36′.

Exemplum II.

SI alterutrum laterum, puta, DB, minus ſit quadrante circuli, & latus alterum DC majus, angulus B oppoſitus lateri DC, erit obtuſus, & angulus C acutus; ac proinde *duo anguli quæſiti, erunt ſpecie prægogniti;* & hypotenuſa BC erit pariter major quadrante. Ponatur DB 75° 34′, & DC 117° 19′, cujus ſupplementum eſt 62° 41′; invenietur angulus B = 116° 34′, & hypotenuſa BC = 96° 34′; cujus inventionis calculum ſubjicio.



In-

Inventio anguli B.

1000000 logarithmus ſinus totius.
1028692 log. tang. $62^{\circ}, 41'$ = ſuppl. ipſius DC.
2028692 ſumma.
998607 log. ſubducendus lateris DB $75^{\circ}, 34'$.
1030085 reſiduum pro logarithmo tangentis $63^{\circ}, 26$
cujus ſupplementum $116^{\circ}, 34'$ = angulo quæſito B.

Inventio hypotenuſæ BC.

939664 log. coſ. $75^{\circ}, 34'$.
966173 log. coſ. $62^{\circ}, 41'$ = ſuppl. ipſius DC.
1905837 ſumma.
1000000 log. ſubducendus ſinus totius.
905837 reſiduum pro log. coſ. $83^{\circ}, 26'$;
cujus ſupplementum $96^{\circ}, 34'$ = hyp. quæſitæ BC.
Similiter ex prima analogia invenietur angulus C 77°.

Aliæ analogiæ pro reſolutione I. Problematis.

Caſus I.

342. Fiat *coſecans lateris adjacentis angulo quæſito, ad ſinum totum,*
Uti cotangens alterius lateris,
ad cotangentem hujus anguli.

Caſus II.

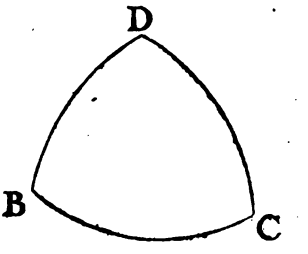
Fiat *ſecans unius duorum laterum, ad ſinum totum,*
Uti coſinus alterius lateris,
ad coſinum hypotenuſæ.

Hæ

Hæ duæ analogiæ conſequuntur ex præcedentibus. Nam partim ex n. 337., partim ex n. 339. deducuntur. Prima duarum ab utroque articulo infertur; ſecunda dumtaxat a n. 339.

Omnes ſecundæ analogiæ quinque aliorum Problematum ex iiſdem fontibus inferuntur.

Jam verò hæ duæ analogiæ applicentur primo exemplo, quo nuper uſi fuimus; quod deinceps ſemper præſtabimus in ſingulis caſibus, eo conſilio, ut, ſi quis error fortaſſe irrepſerit in calculum adhibitâ unâ analogiâ, faciliùs deprehendi poſſit adhibitâ alterâ analogiâ.



Inventio anguli B.

1000000	log. ſinus totius.
938368	log. cotang. $76^{\circ}\ 24'$ DC.
1938368	ſumma.
1003793	log. ſubducendus coſec. $66^{\circ}\ 24'$ DB.
934575	reſid. pro log. cotang. $77^{\circ}\ 30'$ anguli B.

Inventio hypotenuſæ BC.

1000000	log. ſinus totius.
937133	log. coſinus $76^{\circ}\ 24'$ DC.
1937133	ſumma.
1039756	log. ſubd. ſecantis $66^{\circ}\ 24'$ DB.
897377	reſiduum pro log. coſinus $84^{\circ}\ 36'$ BC.

PRO-

PROBLEMA II.

343. *DAtà hypotenusà, & altero crurum, quærere I. angulum dato cruri oppositum, II. angulum dato cruri, & hypotenusæ adjacentem, III. crus reliquum.*

Casus I.

ANgulus dato cruri oppositus, invenietur per hanc analogiam, quæ est inversa analogiæ n. 304.
Sinus hypotenusæ est ad sinum totum;
Utì sinus dati cruris est ad sinum anguli huic oppositi;
qui specie conformis esse debet dato cruri (*n.* 274.).

Casus II.

344. ANgulum dato cruri adjacentem, dabit proportio n. 321., substituta dumtaxat secunda ratione loco primæ.
Cotangens dati cruris est ad cotangentem hypotenusæ;
Utì sinus totus est ad cosinum anguli quæsiti;
cujus speciem determinabit species hypotenusæ, & lateris cogniti; nimirum, si hypotenusa sit minor quadrante circuli, angulus quæsitus in eadem est specie lateris cogniti; verùm, si hypotenusa est major quadrante, angulus quæsitus differt specie a latere cognito (*n.* 294.).

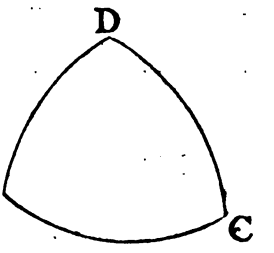
Casus III.

345. INvenietur latus alterum anguli recti per inversam analogiam n. 316.
Cosinus dati cruris est ad sinum totum;
Utì cosinus hypotenusæ est ad cosinum alterius lateris;
quod erit in eadem specie dati cruris, si hypotenusa sit minor quadrante; sin autem eadem sit major, latus quæsitum in diversa erit specie a latere cognito (*n.* 283.).

Exem-

Exemplum I.

ESto triangulum BDC, in quo latus DB ſit $66^{\circ}, 24^{'}$, & hypotenuſa BC $84^{\circ}, 36^{'}$: invenietur angulus C $67^{\circ}, 0^{'}$, ſeu potiùs $66^{\circ}, 59^{'}\frac{1}{2}$; angulus B $77^{\circ}, 30^{'}$; & latus DC $76^{\circ}, 24^{'}$.



Inventio anguli C, *oppoſiti dato cruri* DB.

1000000	log. ſin. totalis.
996207	log. ſin. $66^{\circ}, 24^{'}$ DB.
1996207	ſumma.
999807	log. ſubducendus ſinus $84^{\circ}, 36^{'}$ BC.
996400	reſid. pro log. ſinus $66^{\circ}, 59^{'}\frac{1}{2}$ ang. quæſiti C.

Inventio anguli B, *adjacentis dato lateri* DB.

897556	log. cotang. $84^{\circ}, 36^{'}$ BC.
1000000	log. ſinus totius.
1897556	ſumma.
964037	log. ſubtrahendus cotang. $66^{\circ}, 24^{'}$ DB.
933519	reſiduum pro log. coſ. $77^{\circ}, 30^{'}$ anguli B.

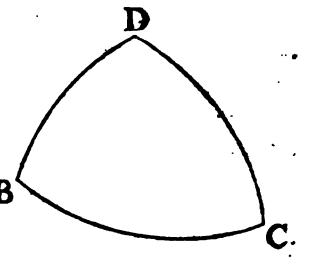
Inventio lateris DC.

1000000	log. ſinus totalis.
897363	log. coſinus $84^{\circ}, 36^{'}$ BC.
1897363	ſumma.
960244	log. ſubtrahendus coſinus $66^{\circ}, 24^{'}$ DB.
937119	reſiduum pro log. coſinus $76^{\circ}, 24^{'}$ DC.

Exem-

Exemplum II.

SI latus DB minus ſit, & hypotenuſa BC major quadrante, nimirum, alterum $75^{\circ}\,34'$, & alterum $96^{\circ}\,34'$, ut in hoc exemplo, angulus B erit obtuſus (*n.* 283.); & latus DC majus 90 gradibus.



Inventio anguli B.

906113	log. cotang. $83^{\circ}\,26'$ ſuppl. ipſius BC.
1000000	log. ſinus totius.
1906113	ſumma.
941057	log. ſubducendus cotang. $75^{\circ}\,34'$ DB.
965056	reſid. pro log. coſ. $63^{\circ}\,26'$ ſup. $116^{\circ}\,34'$ B.

Inventio lateris DC.

1000000	log. ſinus totius.
905827	log. coſinus $83^{\circ}\,26'$ ſuppl. ipſius BC.
1905827	ſumma.
939664	log. ſubducendus coſ. $75^{\circ}\,34'$ DB.
966163	reſid. pro log. coſ. $62^{\circ}\,41'$ ſuppl. $117^{\circ}\,19'$ DC.

Invenietur quoque angulus C $77^{\circ}\,7'$.

Scholion.

SI latus cognitum eſt quadrans circuli, hypotenuſa erit quoque quadrans circuli (*n.* 282.); *& in hoc caſu angulus oppoſitus lateri cognito, erit rectus* (*n.* 274.).

Quod

Quod attinet ad latus alterum, & angulum huic oppoſitum, erunt æqualia inter ſe (*n.* 334.); *verùm determinari non poſſunt.*

Si hypotenuſa ſit quadrans circuli, & latus cognitum majus, minuſve ſit, latus alterum erit quadrans circuli (*n.* 284.); *& angulus oppoſitus, erit grad.* 90; *ac denique angulus oppoſitus lateri cognito, erit eidem æqualis* (*n.* 334.).

Aliæ analogiæ.

346. CAſus I. *Sinus totus*
eſt ad coſecantem hypotenuſæ;
Ut ſinus lateris cogniti
eſt ad ſinum anguli oppoſiti eidem lateri.

347. Caſus II. *Tangens lateris cogniti*
eſt ad tangentem hypotenuſæ;
Ut ſinus totus
eſt ad ſecantem anguli quæſiti.

348. Caſus III. *Sinus totus*
eſt ad ſecantem lateris cogniti;
Ut coſinus hypotenuſæ
eſt ad coſinum lateris quæſiti.

APPENDIX.

349. ANtequam progrediar, juvabit Tironibus declarare pleraſque Obſervationes, quæ viam multò planiorem aperient reſolutioni eorum Problematum, quæ ad triangula rectangula pertinent.

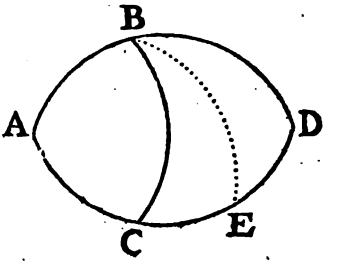
OBSERVATIO I.

SI quando triangulum ſphæricum rectangulum, præter angulum rectum, habeat quampiam partem aliam, quæ ſit 90 *graduum, nimirum, vel unum laterum, vel hypotenuſam, vel angulum adjacentem hypo*
hoc caſu idem triangulum continebit quatuor
rum ſingulæ erunt 90 *graduum.*

duo latera ſint 90 graduum, anguli oppoſiti ſunt ejuſdem ſpeciei (*n.* 274.); ac præterea hypotenuſa continet pariter 90 gradus (*n.* 280.); eademque ratio eſt in ſecundo, & tertio caſu; nam id, quod ſupponitur, verum eſſe non poteſt, niſi duo latera ſint ſingula 90 graduum.

Pro reliquis tribus caſibus facilè conſtabit quarta pars graduum 90. Nam in quarto caſu hæc quarta pars quæſita, erit angulus oppoſitus lateri cognito; in quinto erit hypotenuſa; & in ſexto erit latus oppoſitum angulo cognito. Quamobrem analogiæ erunt prorſus inutiles, ut hæc quarta pars inveniatur.

At erunt quoque inutiles, ut inveniantur duæ reliquæ partes inter ſe æquales. Ratio eſt, quia a quatuor primis partibus, quarum ſingulæ ſunt grad. 90, determinari non poterunt duæ reliquæ; quæ poſſunt eſſe majores, aut minores, ſtantibus quatuor primis in eodem ſtatu; utì conſtare poterit in adjecta figura, in qua, cùm ſupponatur angulus A rectus, & latus AB 90 graduum, duæ hypotenuſæ BC, BE ſunt ambo æquales quadranti circuli, & perpendiculares arcui ACE (*n.* 230. 231. 232.); nam punctum E eſt polus hujus arcus (*n.* 232.); & conſequenter in duobus triangulis BAC, BAE, rectangulis in A, quatuor partes primi ſunt 90 graduum, hoc eſt, angulus A, latus AB, angulus oppoſitus C, & hypotenuſa BC; perinde ac quatuor partes reſpectivæ ſecundi; quamvis duæ reliquæ partes primi, nimirum, latus AC, & angulus oppoſitus, ſint minores reliquis duabus partibus, quæ reſpondent in ſecundo.



OB-

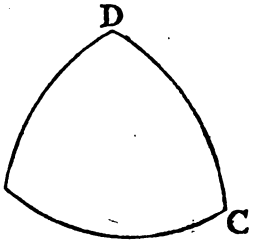
OBSERVATIO V.

353. *Analogiæ non ſolùm inutiles ſunt in caſu, in quo plures partes trianguli continent 90 gradus; verùm etiam peræquè poſſent eſſe falſæ* (*n.* 313.).

In triangulo BDC, rectangulo in D, latus DC ſit quadrans circuli, & latus alterum DB ſit minus gradibus 90. Si uti velis primâ analogiâ I. Problematis, ut inveniatur angulus B, ita dicendum eſſet:

Sinus lateris DB *eſt ad ſinum totum;*
Uti tangens lateris DC *eſt ad tangentem anguli* B.

Quod falſum eſt; nam duo termini primæ rationis ſunt inæquales; & duo termini ſecundæ forent æquales, ſi exiſterent, quippe qui eſſent tangentes quantitatum æqualium; verùm ejuſmodi tangentes non aliter poſſent exprimi, quàm per numeros infinitos; nam arcus DC, & angulus B ſunt ſinguli 90 graduum.



PROBLEMA III.

354. *Dato crure, & angulo intercepto ab eodem crure, & hypotenusâ, invenire I. angulum dato lateri oppoſitum, II. latus alterum, III. hypotenuſam.*

Caſus I. Inſtituatur analogia n. 315.

Sinus totus
eſt ad ſinum anguli cogniti;
Uti coſinus dati cruris
eſt ad coſinum anguli eidem cruri oppoſiti;

qui angulus erit in eadem ſpecie dati cruris (*n.* 274.).

355. *Caſus II.* Uſui erit analogia n. 312.

Inventio hypotenuſæ BC.

965054	log. coſ. 63° 26′ ſuppl. B.
941057	log. cotang. 75° 34′ DB.
1906111	ſumma.
1000000	log. ſinus totius.
906111	reſid. pro log. cot. 83° 26′ ſup. 96° 34′ BC.

Scholion.

SI duarum datarum partium alterutra ſit 90 grad., invenientur partes reliquæ trianguli ſine analogia.

Aliæ analogiæ.

357. CAſus I. *Coſecans anguli cogniti*
eſt ad ſinum totum;
Uti coſinus lateris cogniti
eſt ad coſinum anguli eidem lateri oppoſiti.

358. Caſus II. *Sinus totus*
eſt ad coſecantem lateris cogniti;
Uti cotangens anguli adjacentis eidem lateri,
eſt ad cotangentem alterius lateris.

359. Caſus III. *Sinus totus*
eſt ad ſecantem anguli cogniti;
Uti tangens lateris adjacentis eidem angulo,
eſt ad tangentem hypotenuſæ.

PROBLEMA IV.

360. *DAtis, crure, & angulo eidem oppoſito, invenire I. angulum interceptum inter latus cognitum, & hypotenuſam, II. latus alterum, III. hypotenuſam.*

Oportet autem, ut partes quæſitæ ſpecie ſint præcognitæ.

Caſus

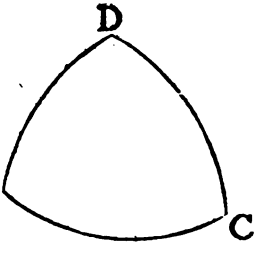
Caſus I. Ex analogia n. 315. *Coſinus lateris dati eſt ad coſinum anguli oppoſiti;*
Uti ſinus totus
eſt ad ſinum anguli quæſiti.

361. Caſus II. *Tangens anguli cogniti*
eſt ad tangentem lateris cogniti;
Uti ſinus totus
eſt ad ſinum lateris quæſiti (*n.* 312.).

362. Caſus III. *Sinus anguli cogniti*
eſt ad ſinum lateris oppoſiti;
Uti ſinus totus
eſt ad ſinum hypotenuſæ (*n.* 304.).

Exemplum.

SIt latus cognitum DB $66^{\circ}\ 24'$, & angulus oppoſitus C $66^{\circ}\ 59\frac{1'1}{2}$: reperietur angulus B $77^{\circ}\ 30'$, latus DC $76^{\circ}\ 24'$, & hypotenuſa BC $84^{\circ}\ 36'$, hoc pacto.



Inventio anguli B, *adjacentis lateri cognito.*

959203	log. coſin. $66^{\circ}\ 59\frac{1'1}{2}$ C.
1000000	log. ſinus totalis.
1959203	ſumma.
960244	log. ſubd. coſin. $66^{\circ}\ 24'$ DB.
998959	reſid. pro log. ſinus $77^{\circ}\ 30'$ B.

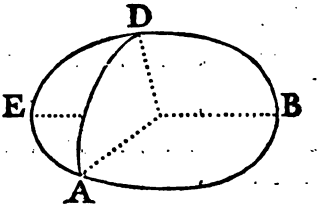
Eademque methodo invenies latus DC, & hypotenuſam BC.

Monitum.

363. *IN omnibus, quæ in analyſi trianguli ſphærici rectanguli contingunt, combinationibus datorum, & quæſitorum, partes datæ ſemper determinant ſpeciem incognitarum; excepta dumtaxat combinatione hujus Problematis, in quo detur alterum latus cum angulo oppoſito, & quæratur quodvis e reliquis tribus; is enim caſus ſemper ambiguus erit, & binas ſolutiones admittet; ac quodvis e reliquis tribus eſſe poterit vel majus, vel minus quadrante, ſtantibus iiſdem conditionibus Problematis.*

Quod ut planiùs intelligas, concipe duo triangula EAD, BAD *rectangula in* A: *latus* AD *eſt commune utrique triangulo; & angulus* AED, *ipſi oppoſitus in primo, æquatur angulo* ABD, *eidem oppoſito in ſecundo; baſis autem* ED, *latus alterum* AE, *& alter angulus* EDA *prioris trianguli, ſunt complementa ad duos rectos baſis* DB, *lateris* AB, *& anguli* ADB *poſterioris. Hinc, ſi detur latus* AD, *& angulus ipſi oppoſitus, ex his dumtaxat datis, ambiguum erit, uter e binis illis triangulis ſumendus ſit. Itaque in iis caſibus, in quibus detur latus cum angulo oppoſito, regulæ ſuperiùs adductæ, locum non habent, nec determinant ſpeciem anguli, vel arcus quæſiti, quam determinant in cæteris omnibus.*

Verùm enimverò in quæſtionibus contractis, quæ occurrunt in reſolutione hujus Problematis, praxis ipſa ſemper aliquid indicabit, quod ſpeciem partis quæſitæ determinare poſſit; quare hæc indeterminatio, quæ auferri non poteſt ab ipſis conditionibus Problematis generatim ſumpti, nihil impediet, quo minùs in particularibus quæſtionibus eædem analogiæ applicari poſſint.



Præ-

Præterea in Problemate propoſito noſſe etiam juvabit, quòd, ſi duæ partes cognitæ eſſent inter ſe æquales, & ambo majores, vel minores gradibus 90, reliquæ partes eſſent ſingulæ graduum 90 (n. 335.). Contra verò, ſi hæ duæ partes cognitæ æquarent ſingulæ quadrantem, hypotenuſa eſſet graduum 90 (n. 281.); & duæ reliquæ partes eſſent æquales inter ſe (n. 334.).

Aliæ analogiæ.

364. CAſus I. *Sinus totus*
eſt ad ſecantem lateris cogniti;
Ut coſinus anguli oppoſiti
eſt ad ſinum anguli quæſiti.
Hæc analogia deducitur ab alterna præcedentis in eodem caſu.

365. Caſus II. *Cotangens anguli cogniti*
eſt ad cotangentem lateris cogniti;
Ut ſinus totus
eſt ad coſecantem lateris quæſiti.

366. Caſus III. *Sinus totus*
eſt ad coſecantem anguli cogniti;
Ut ſinus lateris eidem angulo oppoſiti,
eſt ad ſinum hypotenuſæ.
Hæc pariter analogia deducitur ab alterna præcedentis pro eodem caſu.

PROBLEMA V.

367. COgnitâ *hypotenusâ, & altero angulorum eid adjacentium, quærere I. angulum reliq ejuſdem hypotenuſæ, II. latus dato angulo oppoſ III. latus dato angulo adjacens.*

Caſus I. *Sinus totus*
eſt ad coſinum hypotenuſæ;
Ut tangens anguli dati.
eſt ad cotangentem anguli quæſiti (

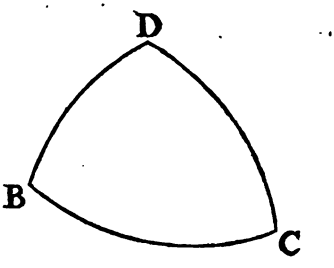
qui eſt in eadem ſpecie anguli cogniti, ſi hypotenuſa minor ſit quadrante; verùm hi duo anguli different ſpecie, ſi hypotenuſa ſit major quadrante (*n.* 288.).

368. Caſus II. *Sinus totus*
eſt ad ſinum hypotenuſæ;
Uti ſinus anguli cogniti
eſt ad ſinum lateris oppoſiti (*n.* 304.);
quod erit in eadem ſpecie anguli cogniti (*n.* 274.).

369. Caſus III. Per inverſam analogiam n. 321.
Coſinus anguli cogniti
eſt ad ſinum totum;
Uti cotangens hypotenuſæ
eſt ad cotangentem lateris quæſiti;
quod erit in eadem ſpecie anguli cogniti, vel in diverſa ſpecie, prout hypotenuſa fuerit minor, vel major quadrante (*n.* 294.).

Exemplum.

PO ne hypotenuſam BC $84^{\circ}, 36'$, & angulum B $77^{\circ}, 30'$: invenies angulum C 67° circiter, latus DC $76^{\circ}, 24'$, latus DB $66^{\circ}, 24'$.



Inventio anguli C.

897363	log. coſinus $84^{\circ}, 36'$ BC.
1065424	log. tang. $77^{\circ}, 30'$ B.
1962787	ſumma.
1000000	log. ſubd. ſinus totus.
962787	reſid. pro log. cotang. $67^{\circ}, 0'$ C.

In-

Inventio lateris DC, *oppoſiti angulo cognito.*

999807 log. ſin. 84° 36′ BC.
998958 log. ſin. 77° 30′ B.
1998765 ſumma.
1000000 log. ſubd. ſinus totius.
998765 reſid. pro log. ſinus 76° 24′ DC.

Inventio lateris DB, *adjacentis angulo cognito* B.

1000000 log. ſin. totius.
897556 log. cotang. 84° 36′ BC.
1897556 ſumma.
933534 log. ſubd. coſ. 77° 30′ B.
964022 reſid. pro log. cotang. 66° 24′ DB.

Scholion.

SI alterutra duarum partium cognitarum ſit 90 graduum, cognoſcentur reliquæ partes in triangulo, etiam ſine analogia.

Aliæ analogiæ.

370. CAſus I. *Sinus totus*
eſt ad ſecantem hypotenuſæ;
Uti cotangens anguli cogniti
eſt ad tangentem anguli quæſiti.

371. Caſus II. *Coſecans hypotenuſæ*
eſt ad ſinum totum;
Uti ſinus anguli cogniti
eſt ad ſinum lateris oppoſiti.

372. Caſus III. *Secans anguli cogniti*
eſt ad ſinum totum;
Uti tangens hypotenuſæ
eſt ad tangentem lateris quæſiti.

PROBLEMA VI.

373. *DAtis duobus angulis adjacentibus hypotenuſæ, quærere I. latera, II. hypotenuſam.*

Caſus I. Per analogiam inverſam n. 315.

Sinus anguli adjacentis lateri quæſito,
eſt ad ſinum totum;
Uti coſinus alterius anguli cogniti
eſt ad coſinum ejuſdem lateris;
quod erit in eadem ſpecie anguli oppoſiti.

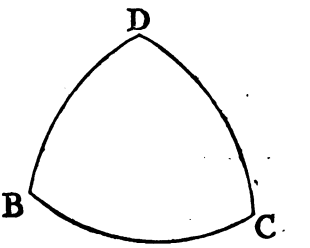
374. *Caſus II.* Per analogiam n. 322., ſubſtituendo dumtaxat ſecundam rationem loco primæ,

Tangens alterutrius angulorum datorum
eſt ad cotangentem alterius anguli;
Uti ſinus totus
eſt ad coſinum hypotenuſæ;

quæ minor erit, vel major quadrante circuli, prout duo anguli erunt ejuſdem, vel diverſæ ſpeciei, & ambo obliqui. Verùm, ſi duo anguli recti ſint, perinde ac angulus oppoſitus hypotenuſæ, tria latera erunt ſingula grad. 90 (*n.* 302.). Denique, ſi duorum angulorum alter ſit rectus, & alter obliquus, latus oppoſitum angulo recto, & hypotenuſa, quadrantem æquabit utrumque (*n.* 274. 282.); & latus alterum totidem gradus continebit, quot continet angulus ipſi oppoſitus (*n.* 334.).

Exemplum.

ESto angulus B $77^{\circ}, 30'$, & angulus C $67^{\circ}, 0'$: invenietur ope calculi, latus DB $66^{\circ}, 24'$, & hypotenuſa BC $84^{\circ}, 36'$.



In-

Inventio lateris DB.

1000000	log. ſinus totius.
959188	log. coſin. $67^{\circ}\,0'$ C.
1959188	ſumma.
998958	log. ſubd. ſinus $77^{\circ}\,30'$ B.
960230	reſid. pro log. coſin. $66^{\circ}\,24'$ DB.

Inventio hypotenuſæ BC.

962785	log. cotang. $67^{\circ}\,0'$ C.
1000000	log. ſinus totius.
1962785	ſumma.
1065424	log. ſubd. tang. $77^{\circ}\,30'$ B.
897361	reſid. pro log. coſin. $84^{\circ}\,36'$ BC.

Aliæ analogiæ.

375. CAſus I. *Sinus totus*
eſt ad coſecantem anguli adjacentis lat. quæſito;
Uti coſinus alterius anguli dati
eſt ad coſinum ejuſdem lateris.

376. Caſus II. *Cotangens unius angulorum cognitorum*
eſt ad tangentem alterius anguli;
Uti ſinus totus
eſt ad ſecantem hypotenuſæ.

PRAXIS ASTRONOMICA

Trianguli ſphærici rectanguli.

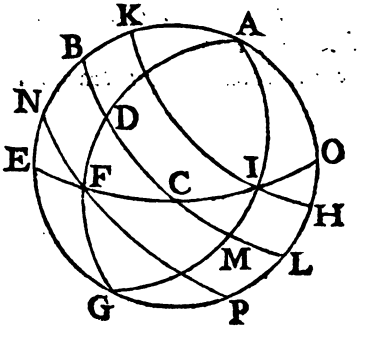
TIRONEM properantem ad analyſim reliquorum triangulorum, morari tantiſper lubet, ut exemplo Cavallerii in ſuo directorio, qualem, quantumque uſum habitura ſit in omni Aſtronomia, analyſis, quam nuper docuimus, trianguli ſphærici rectanguli, ſtatim intelligat; & ad reliquum, quod breve eſt iter, multò fidentiùs ſe inſtauret. Poſtulo autem, ut in elementis, ac definitionibus Sphæræ armillaris, ne prorſus rudis ſit Tiro.

PROBLEMA I.

377. *Solis declinationem ad ſingulos gradus Eclypticæ ſupputare; & tabulam declinationum conſtruere.*

Reſolutio. Circulus, ſub quo ſol movetur, ad æquinoctialem obliquus eſt; illius gradus ſinguli variam ſortiuntur declinationem, ſeu inæqualiter ab æquinoctiali diſtant; hæc diſtantia determinatur a circulo per polos mundi tranſeunte; juvat autem tabulam conſtruere, in qua habeamus ad manum declinationem ſingulorum graduum eclypticæ.

Neque opus erit, niſi ſupputatione unius quadrantis; cùm gradus hinc inde a ſectionibus æqualiter diſtantes, æqualem habeant declinationem.



Sit ergo datus arcus eclypticæ CI, & datum punctum I, cujus declinatio ſit inveſtiganda. Ducatur per punctum I circulus AIMG, per po-

los

los mundi tranſiens: quæritur declinatio IM. Triangulum ſphæricum MCI eſt rectangulum in M; cùm circulus AIM per polos æquinoctialis tranſeat. Cognoſcitur etiam angulus ICM, cujus menſura eſt arcus OL, maxima declinatio eclypticæ jam inventa, nempe grad. $23\frac{1}{2}$. Fiat ergo per Probl. V. n. 368.

Ut ſinus totus ad ſinum arcus CI *eclypticæ;*

Ita ſinus anguli $23\frac{1}{2}$, *ad ſinum declinationis quæſitæ.*

Si per logarithmos operari velis, logarithmum ſinus $23\frac{1}{2}$ adde ſucceſſivè logarithmis ſingulorum arcuum uſque ad 90; & a ſumma ſubtrahe logarithmum ſinus totius (quæ ſubtractio fiet abjecta prima unitate ad ſiniſtram): habebis logarithmos arcuum declinationis in ſingulos gradus unius quadrantis. Quia verò puncta æqualiter diſtantia a ſectionibus, æqualem habent declinationem; & ejuſdem rationis, ſi in eodem hemiſphærio boreali, aut auſtrali inveniantur; diverſæ rationis, ſi in diverſo hemiſphærio; idcirco ſufficiet unus quadrans eclypticæ. Intelligo nempe, quòd initium Tauri, & initium Virginis eamdem habeant declinationem borealem; quòd primus gradus Virginis exactus, & vigeſimus nonus Arietis pariter eamdem declinationem ſortiantur; ſimiliter initium Scorpii, & initium Piſcium æqualem habeant priori, ſed auſtralem.

Hac arte ſupputarunt Aſtronomi ſequentem tabulam, in qua continentur declinationes omnium graduum zodiaci; habet enim gradus eclypticæ deſcendentes, qui pertinent ad ſigna in fronte tabulæ notata, & aſcendentes gradus, qui habentur in ultima columna; pertinentque ad gradus ſignorum in calce notatorum. Uſus facilis eſt; ſi enim velis, poteris ope

Tabula declinationis Eclypticæ.

Gr. Ecl.	0.		6.	1.		7.	2.		8.	
	Aries Libra			Taurus Scorpio			Gemini Arciten.			
	Gr.	ı	ıı	Gr.	ı	ıı	Gr.	ı	ıı	
0	0.	0.	0.	11.	30.	11.	20.	12.	23.	30
1	0.	23.	55.	11.	51.	14.	20.	24.	57.	29
2	0.	47.	51.	12.	12.	5.	20.	37.	3.	28
3	1.	11.	46.	12.	32.	46.	20.	48.	57.	27
4	1.	35.	39.	12.	44.	13.	21.	0.	24.	26
5	1.	59.	31.	13.	13.	28.	21.	11.	26.	25
6	2.	23.	22.	13.	33.	30.	21.	22.	6.	24
7	2.	47.	10.	13.	53.	16.	21.	32.	20.	23
8	3.	10.	54.	14.	12.	51.	21.	42.	10.	22
9	3.	34.	38.	14.	32.	12.	21.	51.	38.	21
10	3.	58.	17.	14.	51.	16.	22.	0.	40.	20
11	4.	21.	51.	15.	10.	7.	22.	9.	18.	19
12	4.	45.	24.	15.	28.	44.	22.	17.	29.	18
13	5.	8.	50.	15.	47.	1.	22.	25.	16.	17
14	5.	39.	59.	16.	5.	6.	22.	32.	38.	16
15	5.	55.	30.	16.	22.	51.	22.	39.	32.	15
16	6.	18.	41.	16.	40.	21.	22.	46.	2.	14
17	6.	41.	46.	16.	57.	33.	22.	52.	8.	13
18	7.	4.	47.	17.	14.	29.	22.	57.	44.	12
19	7.	27.	40.	17.	31.	6.	23.	2.	54.	11
20	7.	50.	24.	17.	47.	23.	23.	7.	40.	10
21	8.	13.	4.	18.	3.	23.	23.	11.	58.	9
22	8.	35.	33.	18.	19.	5.	23.	15.	48.	8
23	8.	58.	4.	18.	34.	25.	23.	19.	10.	7
24	9.	20.	9.	18.	49.	26.	23.	22.	9.	6
25	9.	42.	14.	19.	4.	10.	23.	24.	39.	5
26	10.	4.	10.	19.	18.	30.	23.	26.	40.	4
27	10.	25.	56.	19.	32.	30.	23.	27.	39.	3
28	10.	47.	31.	19.	46.	10.	23.	29.	4.	2
29	11.	8.	57.	19.	59.	26.	23.	30.	6.	1
30	11.	30.	11.	20.	12.	23.	23.	30.	20.	0
	Virgo Piſces			Leo Aquarius			Cancer Capér			Gr. Ecl.
	5.		11.	4.		10.	3.		9.	

iſtius tabulæ, cognito gradu eclypticæ, quem ſol aliquo tempore occupat, aſſignare ejus declinationem; vel cognita declinatione, ſcire, & determinare locum ſolis in eclyptica.

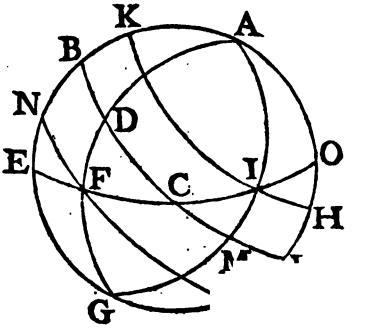
PROBLEMA II.

378. *Aſcenſionem rectam ſingulorum graduum Eclypticæ ſupputare.*

Reſolutio. Solem in circulo ad æquinoctialem obliquo moveri compertum eſt; & in eo motu duæ proprietates conſiderandæ ſunt; nempe, quòd feratur in auſtrum, & boream, ſeu declinationes varias habeat: altera proprietas eſt, quòd in orientem tendat; & quia obliquè incedit, inæqualiter etiam incedat neceſſe eſt. Quare, ut ſciamus, quantùm præcisè ad orientem inceſſerit, motum obliquum, ad circulum directè ad occidentem protenſum reducimus.

Aſcenſio igitur recta alicujus puncti eclypticæ, eſt punctum circuli æquinoctialis, ſimul cum eo oriens in ea regione, quæ ſubjacet æquatori, cujus nempe horizon tranſit per polos mundi.

Quia verò circulus meridianus, immo & omnes circuli horarii, ſunt horizontes reſpectu alicujus regionis in æquatore poſitæ; hinc punctum illud, quod aſcenſionem rectam vocamus, ſimul invenietur in omnibus circulis horariis, cum puncto eclypticæ ſibi correſpondente.



Sit ergo propoſitus gradus zodiaci I, per quem deſcribatur circulus A I M tranſiens per polos æquinoctialis, & ſecans eumdem in puncto M. Supponitur autem cognitus

arcus CI; & quæritur arcus CM, nimirum, aſcenſio recta puncti I. Fiat ergo per Probl. V. n. 369.
Ut coſinus anguli cogniti ICM, *ſeu arcus* LO,
ad ſinum totum;
Ita cotangens hypotenuſæ IC,
ad cotangentem lateris, ſeu arcus quæſiti MC.

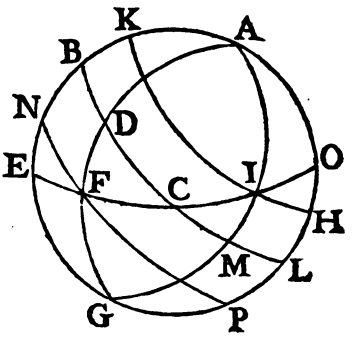
Vel n. 372. fiat, *Ut ſecans anguli cogniti,*
ad ſinum totum;
Ita tangens hypotenuſæ,
ad tangentem lateris quæſiti.

Atque hinc conficiuntur tabulæ aſtronomicæ aſcenſionum rectarum.

PROBLEMA III.

379. *ANgulum Eclypticæ, & Meridiani invenire.*

Reſolutio. In propoſito triangulo IMC reſtat etiam angulus MIC cognoſcendus; quippe qui maximè utilis eſt, præſertim in ſolaribus eclypſibus ſupputandis. Certum eſt autem, quòd eclyptica cum meridiano varios comprehendit angulos, utì ab Aſtronomis oſtenditur; ſufficit autem ſupputare unum quadrantem. Quare eumdem angulum in quovis puncto concurſus eclypticæ cum meridiano ſic inveniemus. Supponitur data longitudo CI; fiat igitur per Probl. V. n. 367.



Ut ſinus totus
ad coſinum hypotenuſæ CI;
Ita tangens anguli cogniti ICM,
ad cotangentem anguli quæſiti MIC.

PRO-

PROBLEMA IV.

380. *DAta declinatione Solis, quæ obſervatione cognoſcitur, habetur ejus aſcenſio recta, & locus in Eclyptica, longitudo, declinatio, & angulus Eclypticæ, & Meridiani per reſolutionem trianguli rectanguli ſphærici.*

Reſolutio. Eſto B C L æquinoctialis circulus, E C O eclyptica, I ſol; a quo ad æquinoctialem demiſſo circulo perpendiculari I M, erit arcus I M ſolis declinatio; & proinde in triangulo rectangulo I M C, ex datis I M, & angulo C, inclinatione eclypticæ ad æquatorem, dabitur per Probl. IV. n. 360. arcus C M, ſolis aſcenſio recta, & C I locus ſolis in eclyptica; quin etiam angulus C I M, inclinatio circuli declinationis, ſeu meridiani ad eclypticam.

Præterea in eodem triangulo C I M rectangulo, cùm angulus C conſtans ſit, & immutabilis, ſi detur vel latus M C, aſcenſio recta, invenire poſſumus declinationem M I, & longitudinem puncti I, quod unà cum M ad meridianum appellit, mediumque cæli dicitur; & angulum M I O, qui eſt inclinatio meridiani ad eclypticam.

Vel, ſi detur I C longitudo puncti I, exinde quoque reliqua invenire poſſumus, ſcilicet C M aſcenſionem rectam, M I declinationem puncti I, & M I O angulum eclypticæ, & meridiani.

PROBLEMA V.

381. *AMplitudinem ortivam graduum Eclypticæ invenire.*

Reſolutio. Puncta veri ortus, & occaſus ſunt ea puncta horizontis, in quibus ſol oritur, & occidit tempore æquinoctii; hæc autem æqualiter diſtant a meridiano, hoc eſt, hinc inde gradibus 90. In iis puncti

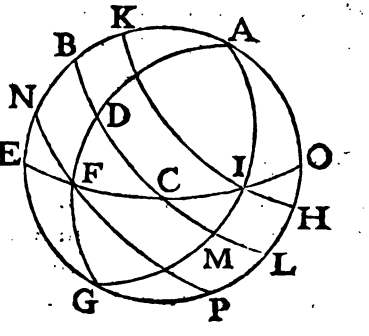
æquator ſecat horizontem; & conſequenter in iiſdem ſol tempore æquinoctiorum oritur; extra verò æquinoctia in aliis punctis oritur; prout majorem, vel minorem habet declinationem.

Differentia inter ortum ſolis, & punctum veri ortus vocatur amplitudo ortiva; & eſt veluti declinatio, non ſumpta ſecundùm circulum horarium, ut antea, ſed ſumpta ſecundùm horizontem; & mutatur juxta majorem, vel minorem inclinationem horizontis ad circulos horarios. Duplex eſt amplitudo ortiva, borealis, & auſtralis.

Sit horizon OE, æquator CD; & ſol percurrat parallelum borealem IK: orietur in puncto I; & amplitudo ortiva erit arcus IC. Pariter ſole percurrente parallelum auſtralem PN, auſtralis amplitudo ortiva erit CF. Itaque per reſolutionem trianguli ſphærici rectanguli CIM, habebitur amplitudo ortiva borealis. Fiat per Probl. IV. n. 362.

Ut ſinus complementi elevationis poli,
ad ſinum totum;
Ita ſinus declinationis ſolis,
ad ſinum amplitudinis ortivæ.

Nam in triangulo rectangulo CIM, ita eſt ſinus anguli ICM, cujus menſura eſt LO complementum altitudinis poli EB, ad ſinum lateris MI, ſeu declinationis; ut ſinus totus anguli recti M, ad ſinum arcus CI, hoc eſt, amplitudinis ortivæ; quare, ſi in ſcheda ſcribas logarithmum ſinus complementi elevationis poli, & eum continuè ſubtrahas ex logarithmis ſinuum declinationis, quibus addas



loga-

logarithmum ſinus totius, quæ additio ſit adjecta unitate initio logarithmi; habebis facilè logarithmos omnium amplitudinum ortivarum. Sufficiet autem id præſtare pro borealibus; nam auſtrales æquales ſunt borealibus.

De Climatibus.

CLima eſt telluris tractus, duobus parallelis æquatori comprehenſus, ſeu, eſt quaſi zona aliqua circa tellurem extenſa; cujus principium, & finis ſunt duo paralleli, quorum unus eſt vel æquator, vel alius circulus minor, æquatori parallelus; alter verò, ſeu finis, pariter eſt alius parallelus ex eadem parte, ſed remotior ab æquatore. Cur autem veteres Geographi regiones telluris per *Parallelos*, & *Climata* diſtinxerint, breviſſimè dicam.

Cùm enim in ſphæra recta, ſeu ſub æquinoctiali, dies noctibus perpetuò æquentur, ſi inde pergamus versùs alterutrum polum, dies æſtate fiunt noctibus longiores, quò propiùs ad polum accedimus, donec ſub ipſis circulis polaribus nulla ſit nox. Hinc per parallelos æquatoris, qui augmenta dierum horæ quadrantibus notabant, tellurem diviſerunt Geographi; nam paralleli illi tantùm a ſe invicem diſtant, quantò opus eſt, ut maxima dies augeatur horæ quadrante, de parallelo in parallelum.

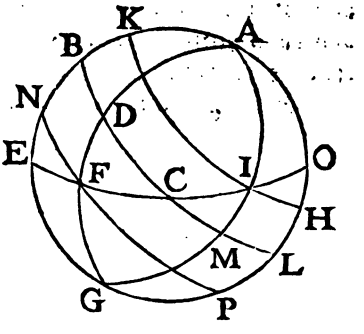
Poſito ergo æquatore, primo parallelo, ſecundus per ea terræ loca tranſibat, ubi dies longiſſima eſt horarum $12\frac{1}{4}$; tertius, ubi dies eſt horarum $12\frac{2}{4}$ &c. Duo autem hujuſmodi paralleli *Clima* conſtituebant; quæ proinde climata ſemihoræ augmento diſtinguuntur.

Poteſt verò exceſſus diei ſolſtitialis ſupra 12 horas continuò augeri, donec ad polarem circulum per-

ventum fuerit, ubi tropicus unico puncto terram tangens, totus eminet, & ſol, illum decurrendo, non occidit; quare dies erit horarum 24, qui excedit æquinoctialem diem horis 12, ſeu 24 ſemihoris, vel 48 horæ quadrantibus; unde conficitur tandem numerus climatum inter æquinoctialem, & polarem eſſe 24, & parallelorum eſſe 48. His animadverſis, ſit

PROBLEMA VI.

382. *INvenire latitudinem, per quam terminatur Clima.* *Reſolutio.* Eſto A alteruter polus mundi; BCL æquator; ECO horizon; AMG circulus horarius ortus ſolis in ſua maxima declinatione. Quare per analyſim trianguli rectanguli ſphærici I M C, invenietur angulus I C M, ſive latitudo L O. Nam latus C M innoteſcit, cùm ſit complementum arcus ſeminocturni M L, ſeu horæ ortus ſolis; & latus M I eſt pariter notum, cùm ſit maxima obliquitas, ſeu declinatio ſolis; fiat itaque per Probl. I. n. 341.



Ut ſinus lateris I C, *ſeu complementi horæ ortus ſolis, ad ſinum totum;*

Ita tangens lateris I M, *ſeu maximæ declinationis ſolis, ad tangentem anguli* I C M, *complementi altitudinis poli, ſeu latitudinis quæſitæ* L O.

Atque hac methodo conſtruuntur tabulæ climatum, in quibus latitudo cujuſvis determinatur.

De

De Crepuſculis.

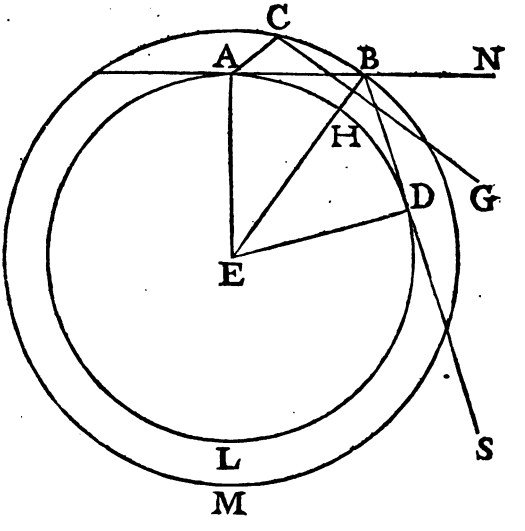
QUàm ſæpe utràque Trigonometrià uti oporteat, planà, & ſphæricà, in aſtronomicis inveſtigationibus, conſtabit Tironi, & utriuſque uſum conjungere diſcet cum voluptate ex ſequentibus Quæſtiunculis.

Quæſtio I.

383. *AN crepera illa, & dubia lux mane ante Solis ortum, & veſpere poſt ejus occaſum conſpicua, quæ* Crepuſculum *dicitur, ab Athmoſphæræ illuminatione oriatur.*

Sublatà athmoſphærà, ex clariſſima luce denſiſſimis tenebris momento temporis, quo ſol occidit, involveremur; ſed per circumfuſam telluri athmoſphæram fit, ut poſt ſolis occaſum, etiamſi nulli directi ad nos pervenire poſſint ſolares radii, reflexis tamen per aliquod tempus fruamur; ac paulatim obrepant noctis tenebræ.

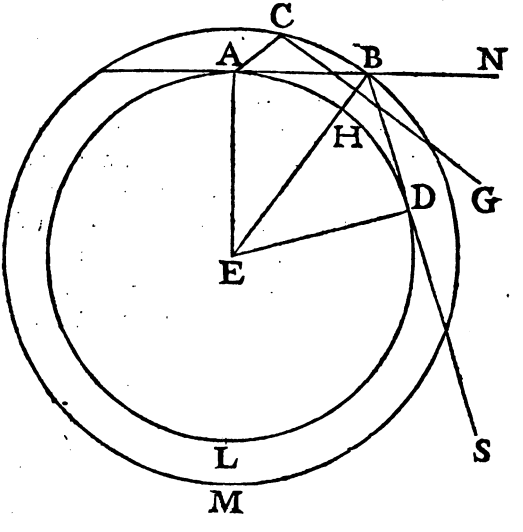
Eſto circulus A D L in telluris ſuperficie, concen-



tricu

tricus verticali, in quo ſol infra horizontem exiſtit, circa quem ſit alius circulus C B M, includens in eodem plano aeris portionem, quæ ſolis radios poteſt reflectere; & oculus ſit in ſuperficie telluris A; cujus horizon ſenſibilis ſit A N. Quia verò ex Elementis, inter tangentem A N, & circulum A D nulla recta duci poteſt ad A; hinc ſole infra horizontem depreſſo, nulli radii poterunt ad oculum A directè pertingere. Verùm a ſole in recta G C exiſtente, duci poteſt recta, quæ in athmoſphæræ particulam C incidat; ibique poteſt radius in C A reflecti, & oculum in A ingredi; atque hac ratione ſolis radii, infinitas athmoſphæræ particulas illuſtrantes, ab iiſdem in oculum detorquentur.

Tangens A B occurrat ſuperficiei aeris, lucem reflectentis, in puncto B, a quo ducatur B D, circulum telluris tangens in D; ſitque ſol in hac linea: tunc radius S B in B A reflectetur; & oculum ingredietur, ob



an-

angulum DBE incidentem, æqualem angulo reflexionis ABE; eritque ille radius, qui primus mane ad oculum pervenire poſſit, & initium crepuſculi matutini; vel ultimus veſpere, & finis crepuſculi veſpertini.

Scholion.

ALiam crepuſculorum cauſam repetunt Aſtronomi ex athmoſphæra ſolari; verùm hujus crepuſculi & brevior eſt duratio, & lux planè diverſa ab illa, quæ ex illuſtratione athmoſphæræ terreſtris oritur; quæque veſpere non finitur, niſi cùm ſol octodecim circiter gradus infra horizontem deprimitur. Hujus crepuſculi duratio pendet ex quantitate materiæ in aere ſuſpenſæ, ad lucis reflexionem idonea, & ex altitudine aeris; hinc hyeme crepuſcula breviora, quàm æſtate, in quâ rarefactus aer altior eſt, & diutiùs a ſole illuſtratur.

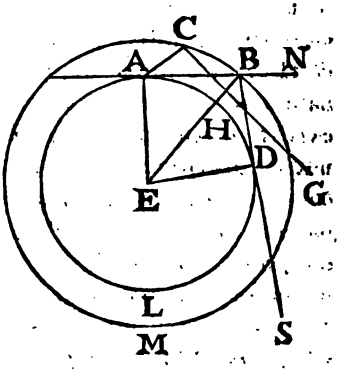
Quæſtio II.

384. *AN ex duratione Crepuſculi inveniri poſſit altitudo aeris.*

Trigonometricè reſolvitur Quæſtio, ſi detur initium crepuſculi matutini, aut finis veſpertini; nimirum, quando lucis radius a ſole prodiens, ac terram tangens, a ſupremo aere ad Obſervatoris oculum reflectitur; ex noto tempore dabitur depreſſio ſolis infra horizontem; ex qua elicitur altitudo aeris.

Sit enim SB radius lucis tellurem tangens, qui a particula B aeris in ſuprema regione reflectatur per lineam AB horizonti parallelam: erit angulus SBN menſura depreſſionis ſolis infra horizontem; & quia radius reflexus BA tellurem quoque tangit, erit angulus AED ad centrum, æqualis angulo SBN depreſſionis ſolis; ejuſque dimidium AEB, hujus dimidio æquale. Sit ſub initium crepuſculi matutini depreſſio ſolis 18 graduum: angulus AEB fiet 9 graduum; quo-

rum eſſet, ſi radius S B irrefractus athmoſphæram tranſiiſſet; at quoniam radius in aere per refractionem incurvatur, minuendus eſt angulus A E B quantitate æquali refractioni horizontali ſolis, hoc eſt, dimidio circiter gradus; unde anguli A E B vera quantitas erit grad. $8\frac{1}{2}$. Porro A E eſt ad B H, ut radius ad exceſſum ſecantis anguli A E B ſupra radium, hoc eſt, ut 100000 ad 1110. Poſito igitur telluris ſemidiametro in numeris rotundis 4000 milliarium, quibus quàm proximè æqualis eſt, elicietur B H altitudo athmoſphæræ, radios ſolares reflectentis, 44 circiter milliarium; nam, ut 100000 ad 1110, ita 4000 ad 44.



Scholion.

IN ſphæra rectà crepuſcula breviſſima ob ſolis rectum deſcenſum; quò obliquior eſt ſphæra, hoc eſt, quò major eſt loci latitudo, eò longior eſt crepuſculi duratio. In ſphæra parallelà crepuſcula per plures menſes durant; unde per totum annum ſolis lumine vel directo, vel reflexo fruuntur incolæ.

Quæ-

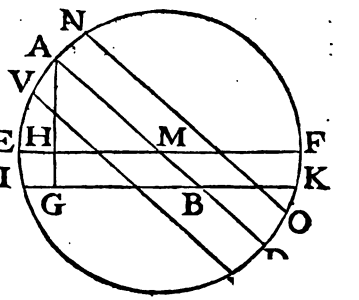
Quæſtio III.

385. *AN ex data duratione Crepuſculi, & declinatione Solis, ejus depreſſio infra Horizontem inveſtigari poſſit; Et viciſſim.*

Supponatur primò ſol in æquatore; & habeatur hora, qua incipit crepuſculum. Sit diameter æquatoris AD, & EF diameter horizontis: erit AH ſinus elevationis ſolis meridianæ, nempe ſinus arcus AE; & HG erit ſinus depreſſionis ſolis infra horizontem; nam IK ſupponitur eſſe diameter circuli, in quo ſol exiſtit initio auroræ, & ſol eſſe in B; eritque MB ſinus durationis crepuſculi in gradus converſæ. Perſpicuum eſt autem, ita eſſe AM ad MB, utì AH ad HG; fiat ergo,

Ut ſinus totus AM
ad ſinum durationis crepuſculi MB;
Ita ſinus complementi elevationis poli, ſeu AH
ad ſinum HG *depreſſionis ſolis infra horizontem.*

Eodem modo, paucis mutatis, ratiocinaberis, ſi ſol ſit in parallelo boreali NO, vel in parallelo auſtrali VX. Cùm ſæpius, & diverſis diebus facta fuerit obſervatio, ſi ſemper eveniat, ut incipiat aurora, ſole 18 gradus infra horizontem depreſſo; deinceps regula generalis conſtitui poterit, & per analogiam expoſitam ſupputari tabula integra crepuſculorum, pro ſingulis parallelis, & ſingulis latitudinibus.



Sed hæc dicta ſint ſatis, non ad explendam, ſed ad acuendam Trigonometriæ ſphæricæ ſitim ex tam præclaris uſibus.

THEORIA, ET ANALYSIS

Trianguli ſphærici obliquanguli.

OBſervaverat Cavallerius in ſuo Directorio Cap. IV. p. III., obliquangulorum triangulorum calculum meritò cæteras Trigonometriæ ſphæricæ partes difficultate ſuperare, tum ob multiplicem Problematum varietatem, tum etiam propter operoſam Theorematum, ex quibus analyſis derivatur, explicationem. Ego verò, quoad poſſem, & liceret, poſtremam hanc Trigonometriæ partem ad eam facilitatem deducere conatus ſum, ut Aſtronomiæ ſtudioſi, quibus hæc analyſis adeò neceſſaria eſt, hos tanquam ſcopulos, & ſyrtes minimè averſari debeant. Omnino horum incommodorum una cautio eſt, atque una proviſio, ut nè nimis citò Theoremata congerantur plurimis ſuppoſitionibus, quas vocant hypotheſes, implicita, ſed pedetentim, partitèque per Lemmata evolvantur ea, quæ ſunt paulo abſtruſiora; quod in ſuperioribus Libris præſtitimus; certè conati fuimus.

Ac primò, ad hujus calculi facilitatem maximè conducet reductio trianguli obliquanguli ad duo rectangula, ope perpendiculi demiſſi ex angulo aliquo in latus oppoſitum, habitum pro baſi, ut in triangulis planis; ſive ipſum perpendiculum cadat intra triangulum, ſive extra.

Porro triangulum ſphæricum *obliquangulum* voco, ut aliàs dixi, in quo nullus angulus eſt rectus.

THEOREMA I.

386. *IN omni triangulo ſphærico obliquangulo, ſinus angulorum, ſinibus oppoſitorum laterum directè ſunt proportionales.*

Hæc analogia demonſtrata jam eſt reſpectu trianguli rectanguli.

De-

Demonſtratio. Sit triangulum ſphæricum obliquangulum ABC: Dico, ita eſſe ſinum anguli B ad ſinum lateris oppoſiti AC, ut eſt ſinus anguli C ad ſinum oppoſiti lateris AB.

Cadat ex A in latus BC perpendicularis arcus AD, ſive intra, ſi duo anguli B & C ſint ejuſdem ſpeciei, hoc eſt, ambo acuti, vel ambo obtuſi; ſive extra, ſi hujuſmodi anguli ſpecie differant (*n.* 277.).

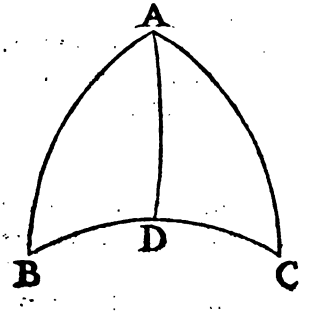
Erit itaque in triangulo rectangulo ADC,
Ut radius ad ſinum anguli C,
Ita ſinus hypotenuſæ AC *ad ſinum cruris* AD (*n.* 304.).

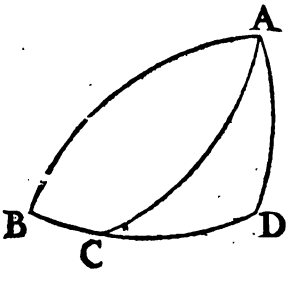
Similiter in altero triangulo ABD,
Ut radius ad ſinum anguli B,
Ita ſinus hypotenuſæ AB *ad ſinum cruris* AD,
& convertendo,
Ut ſinus anguli B, *ad radium*,
Ita ſinus cruris AD, *ad ſinum hypotenuſæ* AB.

Ergo ex æquo perturbatè, ut a latere cernis, erit,

Sinus ang. B	*Sinus hyp.* AC
Radius	*Sinus crur.* AD
Sinus ang. C	*Sinus hyp.* AB

Ut ſinus anguli B *ad ſinum anguli* C;
Ita ſinus hypotenuſæ AC *ad ſinum hypotenuſæ* AB;
& permutando,
Ut ſinus anguli B, in triang. ABC, *ad ſinum lat.* AC;
Ita ſinus anguli C, *ad ſinum lateris* AB.





Eadem prorſus ratione oſtendetur, ducto arcu perpendiculari ex C ad AB, ita eſſe ſinum anguli B ad ſinum lateris AC, ut eſt ſinus anguli BAC ad ſinum lateris CB. In omni ergo triangulo ſphærico obliquangulo &c. Quod erat &c.

THEOREMA II.

387. *IN omni triangulo ſphærico obliquangulo* ABC, *ab angulo verticali* A *in oppoſitam baſim* BC *demiſſo arcu perpendiculari* AD, *Erunt ſinus ſecundi, ſeu coſinus laterum* AB, AC, *ſinibus ſecundis, ſeu coſinibus ſegmentorum* BD, DC *directè proportionales.*

Demonſtratio. In triangulo rectangulo ADB habetur hæc porportio (*n.* 316.):

R : cos — AD :: cos — BD : cos — AB.

In altero pariter triangulo rectangulo ADC,

R : cos — AD :: cos — CD : cos — AC.

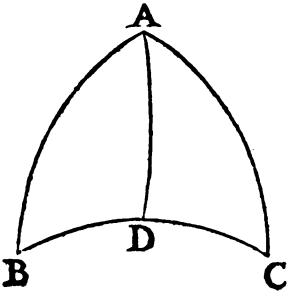
Harum duarum proportionum prima ratio eſt utrobique eadem; ergo duæ ultimæ rationes erunt inter ſe æquales; quare

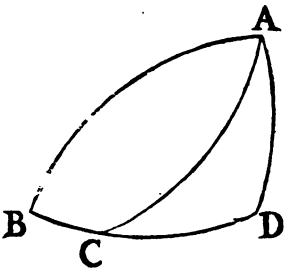
cos — BD : cos — AB :: cos — CD : cos — AC.

Quod erat &c.

Scholion.

QUinque hæc, quæ conſequuntur, Theoremata ſupponunt arcum a vertice anguli in ſuam baſim perpendiculariter ductum.





THEO-

THEOREMA III.

388. IIſdem poſitis, *ſinus angulorum verticalium* BAD, CAD *ſunt directè proportionales ſinibus ſecundis, ſeu coſinibus angulorum* B & C *ad baſim; nimirum*,

S—BAD:S—CAD::cos—B:cos—C.

Demonſtratio. In triangulo rectangulo ADB habetur proportio (*n.* 315.),

R:cos—AD::S—BAD:cos—ABD.

Similiter in altero triangulo ADC,

R:cos—AD::S—CAD:cos—ACD.

Ergo S—BAD:cos—ABD::S—CAD:cos—ACD; & alternando,

S—BAD:S—CAD::cos—ABD:cos—ACD.

Quod erat &c.

THEOREMA IV.

389. IIſdem poſitis, *ſinus ſecundi, ſeu coſinus angulorum verticalium* BAD, CAD, *ſunt directè proportionales cotangentibus laterum* AB, AC; *nimirum*,

cos—BAD:cos—CAD::cot—AB:cot—AC.

Demonſtratio. Triangulum ADB exhibet hanc analogiam (*n.* 321.):

R:cot—AD::cos—BAD:cot—AB.

In triangulo pariter ADC,

R:cot—AD::cos—CAD:cot—AC.

Quare

cos—BAD:cot—AB::cos—CAD:cot—AC; & alternando,

cos—BAD:cos—CAD::cot—AB:cot—AC.

Quod erat &c.

THEOREMA V.

390. *Iſdem poſitis, coſinus angulorum verticalium* BAD, CAD *ſunt reciprocè proportionales tangentibus laterum* AB, AC.

Demonſtratio. Quoniam

cot—AB : cot—AC :: T—AC : T—AB (*n.* 338.), erit per præced.,

cos—BAD : cos—CAD :: T—AC : T—AB.

Quod erat &c.

THEOREMA VI.

391. *Iſdem poſitis, ſinus ſegmentorum baſeos ſunt directè proportionales cotangentibus angulorum ad baſim; hoc eſt*, S—BD : S—CD :: cot—B : cot—C.

Demonſtratio. In triangulo rectangulo ADB nota eſt hæc proportio (*n.* 324.):

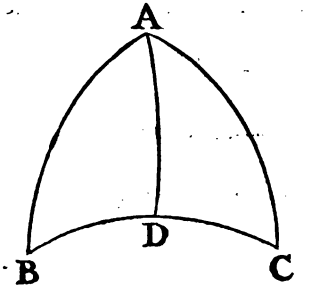
R : cot—AD :: S—BD : cot—B.

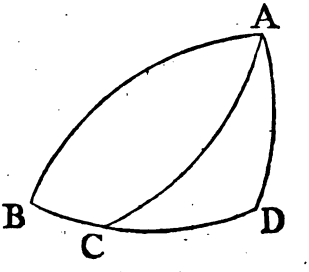
In triangulo quoque ADC,

R : cot—AD :: S—CD : cot—C.

Quare S—BD : cot—B :: S—CD : cot—C; & alternando, S—BD : S—CD :: cot—B : cot—C.

Quod erat &c.





THEO-

THEOREMA VII.

392. *Iſdem poſitis, ſinus ſegmentorum baſeos ſunt reciprocè proportionales tangentibus angulorum ad baſim.*

Demonſtratio. Nam (*n.* 338.)

$$\cot -B : \cot -C :: T-C : T-B$$

Ergo ex præced., $S-BD : S-CD :: T-C : T-B$. Quod erat &c.

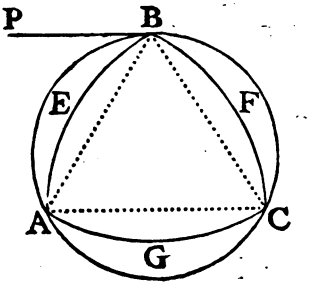
Scholion.

Hæc ſeptem Theoremata conveniunt triangulis ſphæricis obliquangulis, ſive eorum partes excedant 90 gradus, ſive ab iiſdem deficiant; uti notavimus n. 326.

LEMMA I.

393. *Dato triangulo ſphærico iſoſcele* ABC, *datàque chordà* AC, *quæ vicem baſis obit, ſi per verticem* B *ducatur recta* BP, *quæ ſit tangens circuli* ABC, *cujus circumferentia tranſeat per tres vertices dati trianguli; Dico hanc rectam* BP *fore parallelam chordæ* AC.

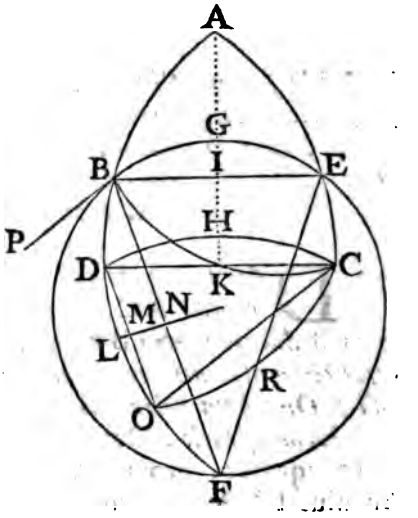
Demonſtratio. Ducantur chordæ BA, BC, quæ erunt æquales, propter æquales arcus AEB, BFC. Angulus PBA æquatur angulo ACB; nam utriuſque menſura eſt ſemiſſis arcus AEB ex Elem. Atqui angulus BAC eſt pariter æqualis angulo ACB, propter æqualitatem chordarum BC & BA; quare angulus PBA æquatur angulo alterno BAC; & conſequenter ex Elem., tangens PB eſt parallela chordæ AC. Quod &c.



LEMMA II.

394. *Dato triangulo ſphærico obliquangulo* ABC, *cujus duo latera* AB, AC *ſint inæqualia, determinari poteſt arcus* DL, *vel* BL, *qui ſit exceſſus ſemiſummæ trium laterum vel ſupra majus latus* AC, *vel ſupra minus latus* AB.

Demonſtratio. In triangulo ſphærico ABC producatur minus latus AB; ac fiat AD = AC, & CE = BD. Si præterea accipiantur arcus BO & DF, æquales ſinguli baſi BC, erit BD = OF, propter partem ſingulis communem DO; denique, ſi arcus DO bifariam ſecetur in puncto L, erit BL = FL.



Ab hiſce æqualitatibus progredior jam ad denominationē ſingularum quantitatum, ope calculi litteralis, ut planior ſit demonſtratio.

Itaque *c* vocetur latus AB;
C latus alterum AC = AD;
b baſis BC.

Quare BD = AD — AB, erit C — *c*;
DO = BC — BD, erit *b* — C + *c*;

Ergo DL erit $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$,

Atqui hæc poſtrema quantitas æquatur huic $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C$

+

$+\frac{1}{2}c-C$; nam ſubſtituendo $+\frac{1}{2}C$ loco $-\frac{1}{2}C$, idem facio, ac ſi adderem $+C$, quod in fine ſubtraho, adjiciendo $-C$; Ergo $DL=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c-C$; hoc eſt, arcus DL eſt exceſſus ſemiſummæ trium laterum b, C, c ſupra majus latus C anguli A; nimirum, quod eòdem recidit, *arcus* DL *eſt differentia majoris lateris* C *a ſemiſumma trium laterum*. Quod erat primum.

Rurſum arcus BL eſt pariter differentia parvi lateris AB a ſemiſumma trium laterum; nam $BL=DL+BD$. Atqui $DL=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c-C$; & $DB=C-c$; utì nuper oſtendimus; Ergo $BL=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c-C+C-c$, hoc eſt, $=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c-c$; nimirum, arcus BL eſt exceſſus ſemiſummæ trium laterum ſupra minus latus AB, ſive, *arcus* BL *eſt differentia minoris lateris* AB *a ſemiſumma trium laterum*. Quod erat alterum.

Corollarium.

395. HOrum *arcuum* DL, BL *determinari poſſunt ſinus*. Nam chordæ DO & BF erunt inter ſe parallelæ, propter æqualitatem arcuum BD & OF. Quare, ſi a centro ſphæræ, quod idem eſt, ac centrum arcuum, ducatur perpendicularis in unam earum chordarum, hæc erit quoque perpendicularis alteri, & utramque bifariam ſecabit, utì & arcus DLO, BLF, ex Elem. Quare rectæ DM, BN erunt ſinus arcuum DL, BL; qui arcus ſunt differentiæ laterum anguli BAC a ſemiſumma trium laterum trianguli.

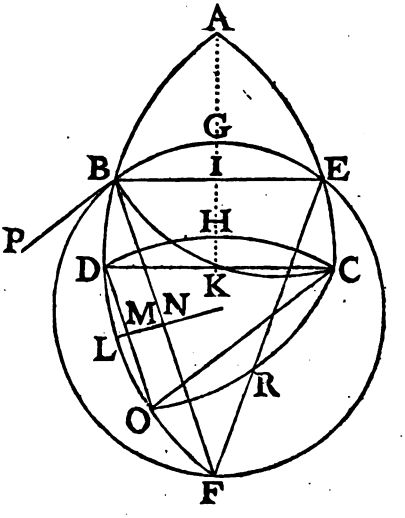
THEOREMA VIII.

396. *Iſdem ſtantibus, I. ſi in triangulo ſphærico* ABC, *quod non ſit æquilaterum, producatur minus latus* AB *anguli* BAC, *donec* AD = AC; *II. ſi a majori latere* AC *ſubducatur portio* CE = BD; *III. ſi ducantur arcus maximorum circulorum* BGE, DHC:

Dico, rectangulum factum a ſinibus ſemiſſium horum arcuum, æquari rectangulo facto a ſinibus differentiarum laterum anguli ABC *a ſemiſumma trium laterum.*

Demonſtratio. Hujuſmodi differentiæ ſunt arcus DL & BL, quorum ſinus ſunt DM, BN ex Corol. præced. Itaque demonſtrandum eſt, rectangulum ſinuum BI, DK, qui ſunt ſinus ſemiſſium arcuum BGE, DHC, æquari rectangulo facto a DM × BN.

Ducatur enim recta EF, & arcus ORC, & chorda OC: conſurgent duo triangula rectilinea BEF & DOC, & inſuper triangulum ſphæricum OBC. Præterea concipiatur circumferentia BFE deſcripta in ſuperficie ſphæræ, & recta PB tangens hujus circuli in puncto B, quæ erit parallela chordæ OC arcus ORC, propter triangulum ſphæricum iſoſceles OBC ex Lem. I., & ex conſtruct. n. 394.



His poſitis, linea BF eſt parallela chor-

dæ

dæ DO, propter æqualitatem arcuum BD, OF; ut vidimus n. 394. Similiter BE eſt parallela rectæ DC, propter arcus æquales BD, EC. Quamobrem plana triangulorum BEF, DOC ſunt invicem parallela; & anguli in B & D ſunt æquales. Præterea, cùm tangens PB ſit parallela chordæ OC, & recta BF parallela rectæ DO, erit angulus PBF æqualis angulo DOC. Atqui angulus PBF eſt pariter æqualis angulo inſcripto BEF ex Elem.; ergo angulus BEF = DOC; ergo duo triangula BEF, DOC ſunt ſimilia; & conſequenter

$$BE : DO :: BF : DC;$$

ſumptiſque ſemiſſibus harum linearum,

$$BI : DM :: BN : DK;$$

atque hinc $BI \times DK = DM \times BN$.
Quare rectangulum factum a ſinibus &c.

Scholion.

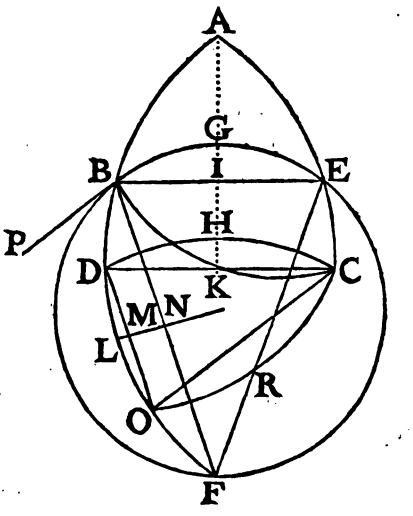
NOtabis, *triangulum* BEF *eſſe in plano circuli* BFE. *Nam tres vertices hujus trianguli ſunt in circumferentia circuli* BFE, *qui poteſt non eſſe maximus ſphæræ. Contra verò triangulum* DOC *non eſt in eodem plano circuli* BFE; *& minùs intra ſoliditatem ſphæræ demerſum eſt; nam ipſius latus* DO *eſt chorda minoris arcus, quàm latus* BF *alterius trianguli.*

THEOREMA IX.

397. IN *omni triangulo ſphærico* ABC, *rectangulum factum a ſinibus laterum anguli cujuſvis, puta,* BAC, *eſt ad quadratum ſinus totius; Uti rectangulum factum a ſinibus differentiarum horum laterum a ſemiſumma trium laterum trianguli, eſt ad quadratum ſinus ſemiſſeos ejuſdem anguli* BAC.

Demonſtratio. Producatur arcus AB in D; & fiat AD = AC; ſumaturque AE = AB; ducantur inſu-

per duo maximorum circulorum arcus, quorum unus tranſeat per B & E, & alter per D & C; denique deſcribatur arcus perpendicularis AGH, qui ſecabit angulum BAC bifariam, perinde ac quemlibet eorum arcuum BGE, DHC. Duo triangula AGB, AGE erunt perfectè æqualia, utì duo reliqua AHD, AHC (*n.* 265.).



His poſitis, habebitur in triangulo rectangulo AGB hæc proportio (*n.* 304.):

Sinus totus eſt ad ſinum lateris AB;
Utì ſinus anguli BAG *eſt ad ſinum* BG.

Similiter in triangulo AHD, erit

Sinus totus ad ſinum AD, *ſeu* AC;
Utì ſinus anguli DAH, *ſeu* BAG, *eſt ad ſinum lat.* DH;

tum multiplicatis inter ſe terminis primæ proportionis per terminos ſecundæ, conſurget hæc tertia proportio:

Quadratum ſinus totius
eſt ad rectangulum factum a ſinibus laterum AB, AC;
Utì quadratum ſinus ang. BAG, *qui eſt ſemiſſis ang.* BAC,
eſt ad rectangulum factum a ſinibus arcuum BG, DH.

Et invertendo,

Rectangulum factum a ſinibus laterum AB, AC,
eſt ad quadratum ſinus totius;
Utì rectangulum factum a ſinibus arcuum BG, DH,
eſt ad quadratum ſinus ſemiſſeos anguli BAC.

Atqui

Atqui rectangulum factum a ſinibus arcuum BG, DH æquatur rectangulo facto a ſinibus differentiarum laterum anguli BAC; Ergo

Rectangulum factum a ſinibus laterum AB, AC, *eſt ad quadratum ſinus totius;*

Uti rectangulum factum a ſinibus differentiarum horum laterum a ſemiſumma trium laterum trianguli,

eſt ad quadratum ſinus ſemiſſeos anguli BAC. Quod erat &c.

LEMMA.

398. *Iſdem ſtantibus, differentia majoris lateris* C *a ſemiſumma trium laterum, æquatur ſemidifferentiæ baſeos, & exceſſus duorum laterum* $C-c$.

Demonſtratio. Exceſſus majoris lateris C anguli A ſupra latus alterum c, eſt $C-c$; ergo ſumma baſeos, & hujus exceſſus, eſt $b+C-c$; cujus ſemiſſis eſt $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}c$. Subducatur a baſi exceſſus $C-c$: fiet $b-C+c$; cujus ſemiſſis eſt $\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c$.

Itaque *ſemiſumma baſeos, & exceſſus unius lateris anguli* A *ſupra latus alterum, eſt* $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}c$.

Semidifferentia baſeos, & ejuſdem exceſſus, eſt $\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c$.

Atqui quantitas litteralis $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}c$ exprimit pariter differentiam minoris lateris c a ſemiſumma trium laterum trianguli; nam hæc differentia, ſive exceſſus ſemiſummæ $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c$ ſupra latus c, eſt $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c-c=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}c$; Ergo differen-

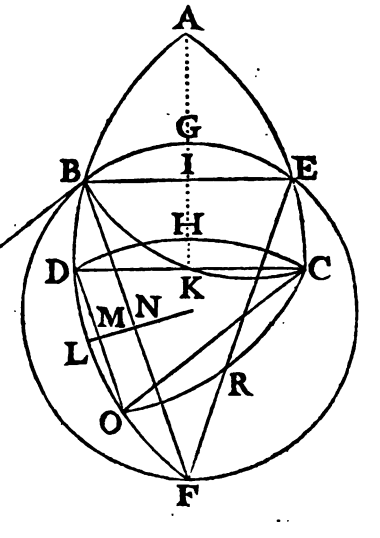
tia

tia minoris lateris c a ſemiſumma trium laterum, æquatur ſemiſummæ baſeos b, & exceſſus $C-c$.

Similiter quantitas altera litteralis $\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c$, quæ repræſentat ſemidifferentiam baſeos, & ejuſdem exceſſus $C-c$, exprimit pariter differentiam majoris lateris C a ſemiſumma trium laterum trianguli; nam hæc differentia eſt $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c-C=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}c$. Ergo differentia majoris lateris C a ſemiſumma trium laterum, æquatur ſemidifferentiæ baſeos b, & exceſſus $C-c$. Quod erat &c.

THEOREMA X.

399. *REctangulum factum a ſinibus laterum anguli* A, *eſt ad rectangulum factum a ſinu ſemiſummæ baſeos, & exceſſus* $C-c$, *in ſinum ſemidifferentiæ baſeos, & ejuſdem exceſſus; Uti quadratum ſinus totius eſt ad quadratum ſinus ſemiſſeos anguli* A.



Demonſtratio. Nam per Lemma præced., ſubſtitui poterit in analogia Theorematis n. 397. rectangulum factum a ſinu ſemiſummæ baſeos, & exceſſus $C-c$, in ſinum ſemidifferentiæ ejuſdem baſeos, & ejuſdem exceſſus; ſubſtitui, inquam, poterit loco rectanguli facti a ſinibus differentiarum laterum

anguli

anguli A, a ſemiſumma trium laterum trianguli. Atqui hinc obtinebitur dicta proportio; conſtat itaque propoſitum.

Scholion.

400. *Diximus, logarithmos eſſe numeros artificiales, ſubſtitutos pro naturalibus, aptos ad ſolvendam multiplicationem ſola additione, & diviſionem ſola ſubtractione. Itaque, ut facilè inveniatur angulus trianguli cujuſvis, cujus tria latera ſint cognita, opus erit, ſimul addere logarithmos ſinuum, qui ſunt radices rectanguli conſtituentis ſecundum terminum analogiæ Theorematis, ac rurſus hanc ſummam addere logarithmo tertii termini, ſive duplo logarithmo radii. Si ab hac ultima ſumma ſubducatur ſumma logarithmorum ſinuum primi termini, reſidui ſemiſſis, erit logarithmus ſinus ſemiſſeos anguli quæſiti. Hæc methodus, ejuſque uſus clariùs conſtabit ex ſequentibus.*

Analyſis Trianguli ſphærici obliquanguli.

QUemadmodum in triangulis ſphæricis rectangulis, ita & in obliquangulis ſex ſunt diverſæ combinationes, quæ occurrere poſſunt in eorum reſolutione. Nam tres partes cognitæ poſſunt eſſe

I. duo latera, & angulus interceptus;
II. duo latera, & angulus uni laterum oppoſitus;
III. latus unum, & duo anguli eidem lateri adjacentes;
IV. latus unum, & duo anguli, quorum unus ſit adjacens, & alter oppoſitus eidem lateri;
V. tria latera;
VI. tres anguli.

Harum ſex combinationum prima, & tertia complectitur quælibet duos caſus; ſecunda, & quarta tres; quinta, & ultima caſum unicum. Hinc duodecim caſuum reſolutio comprehendetur ſex ſequentibus Problematis,

matis, quibus facem præferent regulæ quædam generales, quas ſubjicio.

Monitum.

401. *Hanc hypotheſim ut rite concipias, meminiſſe debes, triangulum ſphæricum illud unicè a nobis conſiderari, & definiri, quod tribus arcubus maximorum circulorum in ſphæræ ſuperficie continetur. Etſi enim arcus circulorum non maximorum, tam angulos, quàm triangula ſphærica conſtituant, nihilo tamen minus hujuſmodi anguli, atque triangula a Trigonometricis non conſiderantur, ut aliàs diximus.*

REGULÆ GENERALES

In Triangulis obliquangulis.

402. *Regula I.* In omni triangulo ſphærico concipi ſemper poterit ſemicircumferentia maximi circuli, quæ tranſeat per verticem anguli ſphærici, & ſit perpendicularis ipſius baſi, utrinque productæ, ſi opus ſit. Licebit itaque ſemper imaginari duos arcus ductos a vertice perpendiculariter in hanc baſim, quorum unus ſit ſupplementum alterius ad ſemicircumferentiam, ita ut unus minor ſit, alter major quadrante circuli; nam hujuſmodi arcus ſunt partes ſemicircumferentiæ diviſæ in vertice anguli.

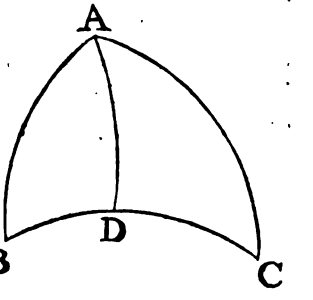
403. *Regula II.* Quando duo anguli baſi adjacentes, ſunt ejuſdem ſpeciei, vel ambo acuti, vel ambo obtuſi, alteruter duorum arcuum perpendicularium cadit intra triangulum (*n.* 277.). Et reciprocè, ſi unus horum duorum arcuum cadat intra triangulum, duo anguli ad baſim ſunt ejuſdem ſpeciei (*n.* 276.). Sin autem duorum arcuum perpendicularium neuter cadat intra triangulum, duo anguli ad baſim ſunt diverſæ ſpeciei.

Scho-

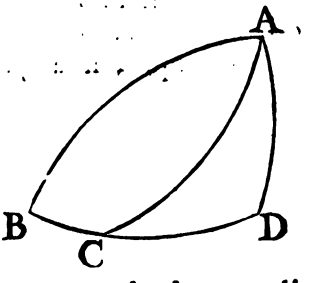
Scholion.

404. *IN biſce regulis ſupponitur, ſummitatem anguli baſi oppoſiti, non eſſe polum hujus baſis; aliter omnes arcus ab hoc vertice in baſim ducti, perpendiculares forent eidem baſi, perinde ac duo latera* (*n.* 232.).

405. *Regula III.* Si duo anguli B & C ad baſim ſint acuti, arcus perpendicularis A D, qui intra triangulum cadit, minor eſt quadrante circuli. Nam in triangulo A D B, rectangulo in D, latus A D ſequitur ſpeciem anguli B oppoſiti (*n.* 274. 275.). Eadem de cauſa, ſi duo anguli ad baſim ſint obtuſi, arcus perpendicularis, qui intra triangulum cadit, major erit quadrante circuli.



406. *Regula IV.* Arcus a vertice anguli perpendiculariter in ſuam baſim ductus, & qui cadit versùs partem anguli acuti ejuſdem baſis, minor eſt quadrante circuli. Et arcus alter perpendicularis baſi, qui cadit ad partes anguli obtuſi ejuſdem baſeos, major eſt quadrante circuli. In triangulo B A C angulus B ſit acutus, & angulus C obtuſus; perſpicuum eſt arcum perpendicularem A D, qui cadit versùs partes anguli acuti B, minorem eſſe quadrante circuli.

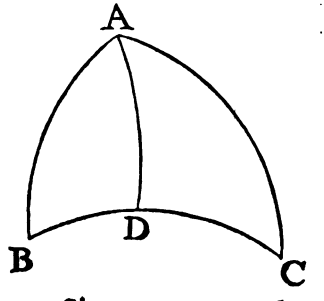


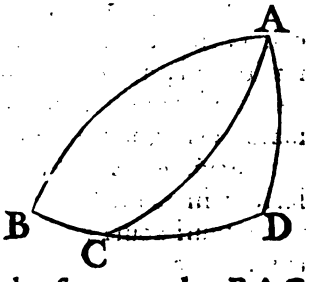
407. *Regula V.* Quamobrem, quando duo anguli B & C ſunt acuti, uterque flectitur versùs minorem arcum perpendicularem A D, qui proinde cadit intra triangulum B A C. Si duo anguli ſint obtuſi, ambo re-

reſpiciunt majorem arcum perpendicularem, qui pariter cadit intra triangulum.

Denique, ſi angulorum alter ſit obtuſus, & alter acutus, neuter duorum arcuum perpendicularium cadit intra triangulum (*n.* 277.). Converſæ harum regularum ſunt ſimiliter veræ (*n.* 276.).

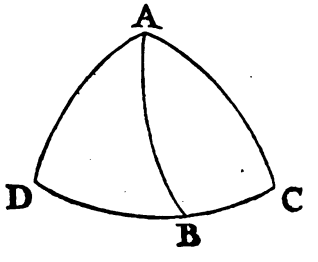
408. *Regula VI.* Quoniam angulus acutus ſemper reſpicit arcum perpendicularem AD, minorem 90 gradibus; ſi angulus B ſit acutus, erit angulus BAC vel ſumma, vel differentia angulorum BAD & CAD, prout hic arcus AD cadet intra, vel extra triangulum ABC. Cadet intra, ſi angulus C ſit etiam acutus ex Reg. IV.; cadet extra, ſi angulus C ſit obtuſus.

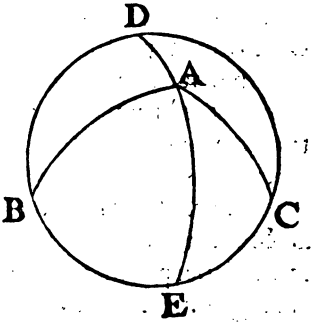




Sin autem angulus B ſit obtuſus, angulus BAC erit differentia angulorum BAD, CAD.

Denique, ſi angulus C ſit pariter obtuſus, erit





angu-

angulus BAC ſupplementum ſummæ horum duorum angulorum BAD, CAD ad gradus 360. In hoc caſu major arcus perpendicularis AE cadet intra triangulum ABC.

409. *Regula VII.* Dici pariter poteſt, quòd, quando angulus B eſt acutus, ut in Fig. 2., CAD eſt differentia angulorum BAC, BAD.

Si angulus B ſit obtuſus, ut in Fig. 3., CAD erit ſumma angulorum BAC, BAD; dummodo hæc ſumma ſit minor gradibus 180; nam, ſi hæc ſumma eſſet major 180 gradibus, in hoc caſu CAD eſſet ſupplementum ſummæ ad 360 gradus. Hic caſus occurrit, quando uterque angulus B & C eſt obtuſus, ut in Figura 4.

410. *Regula VIII.* Eadem ratiocinatio aptari pariter poteſt arcubus BC, CD, qui ſunt baſes angulorum BAC, CAD.

Itaque, ſi angulus B eſt acutus, ut in Fig. 1. & 2., BC erit vel ſumma, vel differentia ſegmentorum BD & CD, prout arcus AD cadet intra, vel extra triangulum.

Si angulus B eſt obtuſus, ut in Fig. 3., BC erit differentia ſegmentorum BD & CD.

Denique, ſi duo anguli B & C ſint obtuſi, ut in Fig. 4., arcus BC erit ſupplementum ſummæ horum duorum arcuum BD & CD, ad 360 gradus.

411. *Regula IX.* Si angulus B ſit acutus, ut in Fig. 2., dici pariter poteſt, ſecundum ſegmentum CD eſſe differentiam arcuum BC & BD.

Si angulus B ſit obtuſus, ut in Fig. 3., ſegmentum CD erit ſumma arcuum BD & BC.

Sin autem ſumma arcuum BD & BC excedat gradus 180, ut in Fig. 4., in hoc caſu ſegmentum CD erit ſupplementum hujus ſummæ ad gradus 360; tunc enim accipi oporteret ſegmentum CD, tanquam baſis anguli CAD, ex parte oppoſita arcui AB.

Scholion.

HÆc omnia palam conſtant, ſi rite concipiatur poſitio laterum AB & AC reſpectu perpendicularis AD; hæc autem poſitio pendet a ſpecie angulorum B & C.

Monitum I.

412. SI quando tres partes datæ in analyſi trianguli, ſint vel tria latera, vel tres anguli; vel tres partes datæ, & quæſitæ, ſint oppoſitæ, binæ binis, neceſſe non eſt, ut concipiatur arcus perpendicularis ab uno trium angulorum ductus; qui tamen neceſſarius erit in reliquis caſibus; utì mox conſtabit.

Si tres partes cognitæ ſeſe invicem conſequantur, arcus perpendicularis duci debet ab una trium partium, quæ ſit extrema, quin tranſeat per quæſitam. Voco autem partem extremam, primam, & tertiam.

Contra verò, ſi trium partium datarum duæ dumtaxat ſint deinceps conſequentes, arcus perpendicularis tranſire debet per partem quæſitam. Hæc omnia ſubjectis exemplis multò planiùs conſtabunt.

Monitum II.

413. IN ſequentibus Problematis arcum baſi perpendicularem nos ſemper illum uſurpabimus, qui cadit versùs partes anguli acuti, ac proinde qui minor eſt gradibus 90; ſive hic arcus cadat intra, ſive extra triangulum.

PROBLEMA I.

414. DAtis duobus lateribus BA, BC trianguli ſphærici BAC, & angulo B ab iiſdem intercepto, invenire I. duos reliquos angulos C & A, II. tertium latus AC.

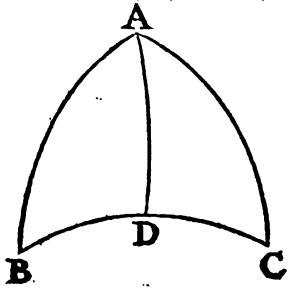
Re-

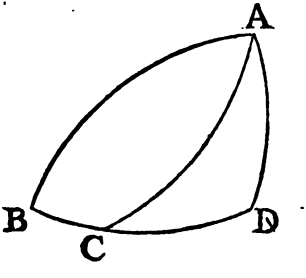
Reſolutio. Quoniam hujus Problematis tres partes cognitæ ſeſe immediatè conſequuntur, concipiatur arcus perpendicularis AD, ab una extremarum cognitarum ductus (*n.* 413.), qui neceſſariò cadet in alteram extremam partem cognitam, & productam, ſi opus ſit.

In triangulo rectangulo ADB, in quo datur angulus rectus D, hypotenuſa AB, & angulus ABD, qui eſt ſemper acutus, ſive ſit idem angulus B primi trianguli ABC, ſive ſit ejus ſupplementum; in hoc, inquam, triangulo ADB, quæratur ſegmentum, ſive latus BD, per hanc analogiam, quæ eſt inverſa illius, quæ exhibetur n. 321.

Coſinus anguli cogniti B
eſt ad ſinum totum;
Uti cotangens hypotenuſæ AB
eſt ad cotangentem lateris quæſiti BD;
quod erit ejuſdem ſpeciei, in qua eſt hypotenuſa AB (*n.* 296.); nam angulus ABD eſt ſemper acutus.

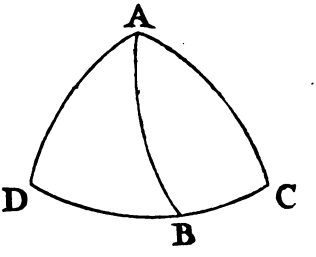
Cognito primo ſegmento BD, invenietur aliud ſegmentum CD, quod erit differentia inter BC, BD, ſi angulus ABC ſit acutus (*n.* 411.).

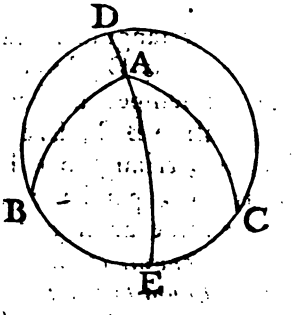




Sin autem angulus ABC ſit obtuſus, ſegmentum CD erit ſumma laterum BC, BD, quoties hæc ſumma non excedit gradus 180.

Quòd ſi excedat gradus 180, ſegmentum CD eſt ſupplementum ſummæ ad 360 gradus (*n.* 411.). His animadverſis, ſit



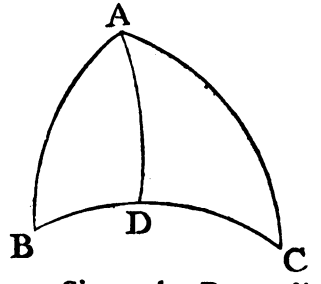


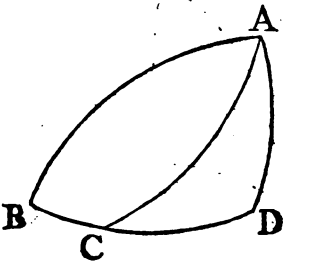
Caſus I.

415. INvenietur angulus C, adjacens baſi AC, per hanc analogiam (*n.* 392.):

Sinus ſegmenti CD *eſt ad ſinum ſegmenti* BD;
Ut tangens anguli B *eſt ad tangentem anguli* C.

Si angulus B deficit a 90 gradibus, angulus C erit acutus, vel obtuſus, prout latus BC majus, minuſve fuerit ſegmento BD; vel, quod eòdem recidit, prout arcus perpendicularis AD cadit intra, aut extra triangulum ABC (*n.* 407.).





Si angulus B excedit 90 gradus, ut in Fig. 1. & 2., angulus C erit acutus, vel obtuſus, prout ſumma ſegmen-

mentorum BC, BD minor erit, aut major grad. 180.

Corollarium.

SImili diſcurſu reperietur angulus BAC, ſi concipiatur arcus ductus a puncto C perpendiculariter in latus AB, ac reliqua peragantur pro eodem angulo A, quæ docuimus in inventione anguli C.

Caſus II.

416. INvenietur latus AC per analogiam n. 387. Fiat,
Ut coſinus ſegmenti BD *ad coſinum ſegmenti* CD;
Ita coſinus lateris AB *ad coſinum lateris* AC;
quod minus, aut majus erit gradibus 90, prout ſegmentum CD minus, aut majus fuerit quadrante circuli. Nam, quoniam arcus perpendicularis AD, qui conſideratur tanquam latus trianguli rectanguli ADC, minor eſt gradibus 90 (*n.* 413.), hypotenuſa AC debet eſſe ejuſdem ſpeciei, in qua eſt latus alterum CD (*n.* 278.); quod perinde verum eſt, ſi ponatur angulus B acutus, ſive obtuſus.

Si ſegmentum CD eſſet quadrans circuli, hypotenuſa AC eſſet pariter quadrans circuli (*n.* 282.).

Exemplum.

PONatur latus AB $61^{\circ}\,11'$, ut in Fig. 3. pag. præced.; latus BC $83^{\circ}\,33'$; & angulus B $73^{\circ}\,24'$. Invenietur ſegmentum BD $27^{\circ}\,27'$; quod eſt ejuſdem ſpeciei anguli B; ambo enim deficiunt a gradibus 90; nam hypotenuſa AB minor eſt quadrante circuli. Quia verò angulus B eſt acutus, ſubducere oportet ſegmentum BD a baſi BC; & reſiduum $56^{\circ}\,6'$ æquabitur ſegmento CD.

His poſitis, invenietur angulus C 61°, $46\frac{11}{2}'$, & latus AC $72^{\circ}\,22'$, per analogias expoſitas.

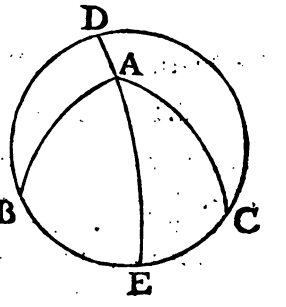
Inventio anguli C.

966368	logarithmus ſinus 27°, 27′ BD.
1052562	log. tangentis 73°, 24′ anguli B.
2018930	ſumma.
991908	log. ſubducendus ſinus 56°, 6′ CD.
1027022	reſid. pro log. tang. 61°, 46′ 30″ ang. quæſiti C.

Inventio lateris AC.

974644	log. coſinus 56°, 6′ ſegmenti CD.
968305	log. coſinus 61°, 11′ lateris AB.
1942949	ſumma.
994813	log. ſubducendus coſ. 27°, 27′ ſegmenti BD.
948136	reſid. pro log. coſ. 72°, 22′ lat. quæſiti AC.

Sin autem ponatur latus AB 91°, 17′; BC 123°, 58′; & angulus B 117°, 28′, invenietur ſegmentum BD 92°, 47′; atque hinc elicietur CD 143°, 15′.



His poſitis, invenietur angulus C 107°, 18′; & latus AC 111°, 41′ circiter.

Inventio anguli C.

999949	log. ſin. 87°, 13′ ſuppl. BD.
1028414	log. tang. 62°, 32′ ſuppl. anguli B.
2028363	ſumma.
977694	log. ſubducendus ſin. 36°, 45′ ſuppl. CD.
1050669	reſid. pro log. tang. 72°,42′ ſup. 107°,18′ = ang. C.

Inventio lateris AC.

990377	log. coſin. 36°, 45′ ſuppl. CD.
835018	log. coſin. 88°, 43′ ſuppl. AB.
1825395	ſumma.
868627	log. ſubd. coſin. 87°, 13′ ſuppl. BD.
956768	reſid. pro log. coſ. 68°, 19′ ſup. 111°, 41′ = AC.

PROBLEMA II.

417. *Datis lateribus duobus, & angulo uni eorum oppoſito, invenire I. angulum alteri lateri cognito oppoſitum, II. angulum a lateribus datis comprehenſum, III. latus tertium.*

Caſus I.

Reſolutio. Per analogiam n. 386. invenietur angulus oppoſitus alteri lateri cognito; nimirum,
Sinus lateris oppoſiti angulo cognito,
eſt ad ſinum hujus anguli;
Uti ſinus alterius lateris cogniti
eſt ad ſinum anguli quæſiti;
cujus ſpecies poteſt eſſe indeterminata, ſi dumtaxat habeatur ratio partium cognitarum; ſed hujus ſpecies determinari poterit, aut præcognoſci ex particular

quæſtione, ad quam hæc analogia accommodabitur; ut alibi dictum eſt.

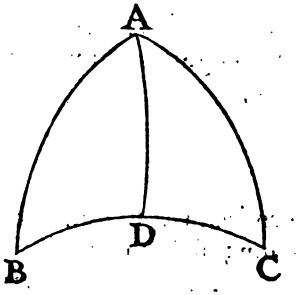
Caſus II.

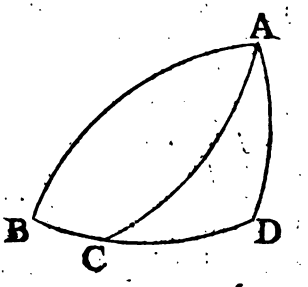
418. UT inveniatur angulus a lateribus datis interceptus, concipiatur arcus perpendiculariter ductus a vertice hujus anguli in latus oppoſitum (*n.* 412.). Itaque, ſi ponantur duo latera cognita AB, AC, ducatur oportet arcus AD perpendiculariter in BC; tum, dato pariter angulo B, oppoſito lateri AC, quæratur angulus BAD trianguli rectanguli ADB per analogiam n. 322.

Sinus totus eſt ad coſinum hypotenuſæ AB;
Uti tangens anguli B *eſt ad cotangentem anguli* BAD;
qui erit acutus, aut obtuſus (*n.* 294.), prout hypotenuſa AB minor, majorve fuerit quadrante circuli; ponitur enim latus AD minus gradibus 90 (*n.* 413.).

Cognito angulo BAD invenietur angulus CAD per analogiam n. 389. Fiat

Cotangens lateris AB *ad cotangentem lateris* AC;
Uti coſinus anguli BAD *ad coſinum anguli* CAD;
qui erit acutus, aut obtuſus, prout hypotenuſa AC minor eſt, aut major quadrante circuli (*n.* 294.). Nam angulus CAD adjacet lateri, ſeu arcui perpendiculari AD, qui ſemper minor eſt quadrante circuli





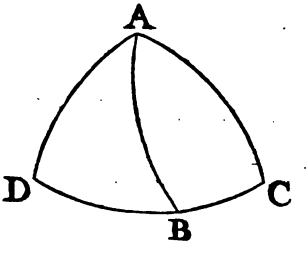
(*n.*

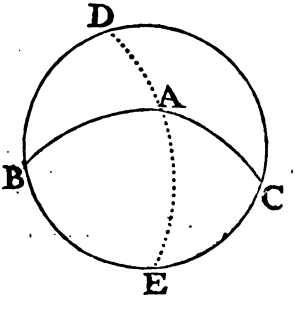
(*n.* 413.). Si hypotenuſa AC ſit æqualis quadranti circuli, angulus CAD erit rectus. Nam in hoc caſu latus CD trianguli rectanguli ADC erit quadrans circuli (*n.* 284.); & aliunde angulus CAD ſequitur ſpeciem lateris oppoſiti CD (*n.* 274.).

Quæ hactenus demonſtrata ſunt, nondum determinant angulum BAC a notis lateribus comprehenſum.

Nam, ſi angulus datus B eſt acutus, ut in præcedentibus Figuris, BAC poteſt eſſe vel ſumma, vel differentia angulorum BAD & CAD, prout arcus perpendicularis AD cadit intra, vel extra triangulum ABC; ſive, prout angulus C eſt acutus, vel obtuſus (*n.* 408.).

Si angulus datus B ſit obtuſus, BAC erit differentia angulorum BAD & CAD; vel idem angulus BAC erit ſupplementum eorumdem angulorum BAD & CAD ad gradus 360, prout angulus C eſt acutus, vel obtuſus. Quamobrem, ut determinari poſſit angulus BAC, *præcognoſcenda erit ſpecies anguli* C.





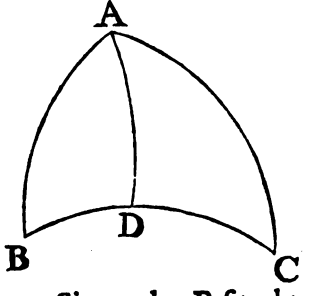
Caſus III.

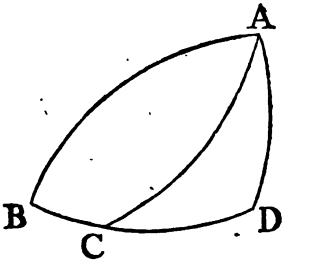
419. UT inveniatur latus BC, quæratur ſegmentum BD per analogiam n. 321. Cognito hoc primo ſegmento, invenietur ſecundum ſegmentum CD per analogiam n. 387.

Cosinus lateris AB *est ad cosinum lateris* AC;
Ut cosinus segmenti BD *est ad cosinum segmenti* CD;
quod minus erit, aut majus 90 gradibus, prout hypotenusa AC trianguli rectanguli ADC minor, aut major erit quadrante circuli (*n.* 283.); nam latus alterum AD semper supponitur minus 90 gradibus.

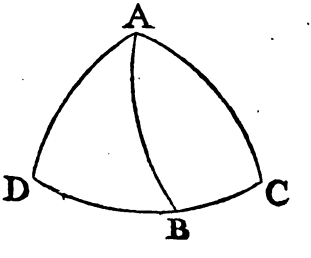
Si hypotenusa AC est quadrans circuli, segmentum CD erit quoque quadrans circuli (*n.* 284.); & in hoc casu absque analogia innotescet.

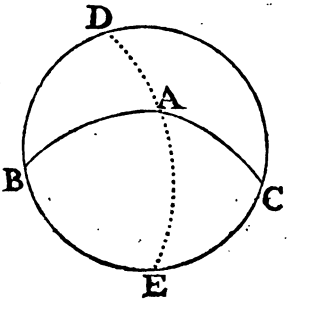
Hinc tamen determinari nondum poterit species lateris BC. Nam, si angulus B sit acutus, latus BC æquabitur summæ, vel differentiæ segmentorum BD & CD, prout arcus perpendicularis AD cadit intra, vel extra triangulum ABC, sive, prout angulus C est acutus, vel obtusus (*n.* 410.).





Si angulus B sit obtusus, latus BC æquabitur differentiæ horum segmentorum, sive eorum supplemento ad gradus 360, prout angulus C est acutus, vel obtusus.





Exemplum.

PONatur latus AB $61^{\circ}\,11'$, ut in Fig. 1.; latus AC $72^{\circ}\,22'$; & angulus B $73^{\circ}\,24'$. Invenietur I. angulus C $61^{\circ}\,46'$; II. angulus BAC $92^{\circ}\,18'$; III. latus BC $83^{\circ}\,33'$.

Inventio anguli C.

998151	logar. ſinus $73^{\circ}\,24'$ anguli B.
994259	logar. ſinus $61^{\circ}\,11'$ lateris AB.
1992410	ſumma.
997910	logar. ſubd. ſinus $72^{\circ}\,22'$ lateris AC.
994500	reſid. pro log. ſinus $61^{\circ}\,46'$ ang. quæſiti C.

Simili methodo reliqua invenies, quæ continentur in Problemate.

PROBLEMA III.

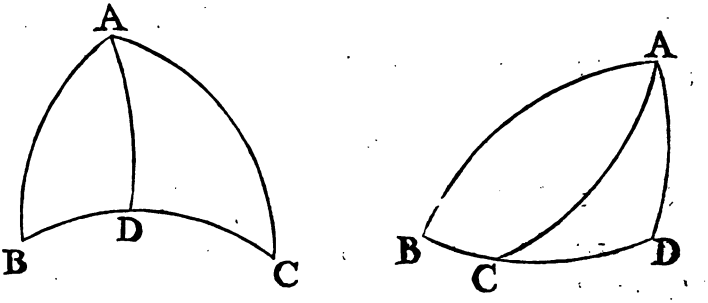
420. *DAto quovis latere, & angulis eidem adjacentibus, invenire I. tertium angulum, II. duo reliqua latera.*

Reſolutio. Quoniam tres partes cognitæ, puta, AB, & anguli A & B, ſeſe immediatè conſequuntur, concipiatur oportet, ab uno angulorum, puta, A, qui ſit pars extrema, concipiatur, inquam, arcus AD perpendicularis lateri oppoſito BC; tum in triangulo rectangulo ADB quæratur angulus BAD per analogiam n. 322.

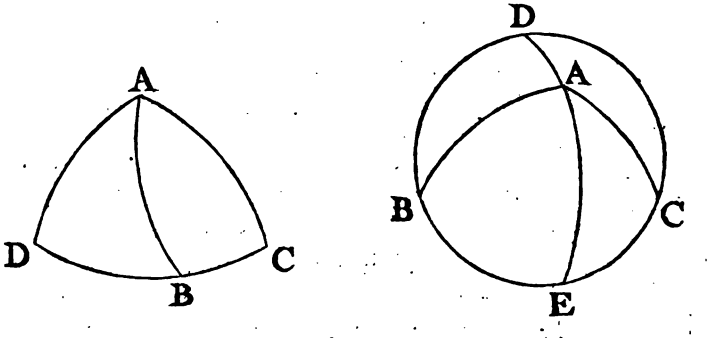
Sinus totus eſt ad coſinum hypotenuſæ AB;
Uti tangens anguli B *eſt ad cotangentem anguli* BAD; qui erit acutus, vel obtuſus, prout hypotenuſa AB minor, majorve fuerit quadrante circuli (*n.* 289.); nam alter angulus ABD ſemper ſupponitur acutus (*n.* 413.).

Co-

Cognito angulo BAD, facilè invenietur angulus CAD. Nam, ſi angulus B eſt acutus, angulus CAD erit differentia angulorum BAC & BAD (*n.* 409.).



Si angulus B ſit obtuſus, angulus CAD erit ſumma angulorum BAC & BAD; excepto tamen eo caſu, in quo hæc ſumma excederet gradus 180; tunc enim angulus CAD eſſet ſupplementum ſummæ ad gradus 360. His animadverſis,



Caſus I.

421. INvenietur angulus C per analogiam n. 388. *Sinus anguli* BAD *eſt ad ſinum anguli* CAD; *Uti coſinus anguli* B *eſt ad coſinum anguli* C.

Si angulus B ſit acutus, ut in Fig. 1. & 2., angulus ACB erit acutus, vel obtuſus, prout angulus BAC

BAC major minorve fuerit angulo BAD, ſive, prout perpendicularis AD cadet intra, vel extra triangulum.

Si angulus B eſt obtuſus, ut in Fig. 3. & 4., angulus C erit acutus, vel obtuſus, prout ſumma duorum angulorum BAC & BAD minor erit, aut major gradibus 180.

Scholion.

SI angulus CAD *eſſet rectus, in hoc caſu, in triangulo* ADC, *rectangulo in* D, *cognoſceretur latus* DC, *quod eſſet quadrans circuli; neceſſe eſt enim, ut ſit ejuſdem ſpeciei cum angulo oppoſito* CAD (*n.* 274.); *ac proinde hypotenuſa* AC *eſſet pariter quadrans circuli* (*n.* 182.); *atque hinc angulus* C *æquaretur lateri oppoſito* AD (*n.* 334.). *Jam verò in triangulo* ADB, *rectangulo in* D, *cognoſcetur latus* AD *per analogiam n.* 304.

Caſus II.

422. INvenietur latus AC per analogiam n. 389. *Coſinus anguli* BAD *eſt ad coſinum anguli* CAD; *Uti cotangens lateris* AB *eſt ad cotangentem lateris* AC; quod minus, aut majus erit quadrante circuli, prout angulus CAD adjacens lateri AD trianguli rectanguli ADC, minor majorve fuerit 90 gradibus (*n.* 290. 292.). Nam hoc latus AD ponitur ſemper deficere a quadrante circuli (*n.* 413.). Oſtendimus autem latus AC fore quadrantem circuli, ſi angulus CAD ſit rectus.

Invenietur latus alterum BC, ſi a puncto B ducatur arcus perpendicularis in latus oppoſitum AC, productum, ſi opus ſit; nam hic arcus tranſire non debet per latus quæſitum (*n.* 412.); tum reliqua pergenda, ut ante.

Scho-

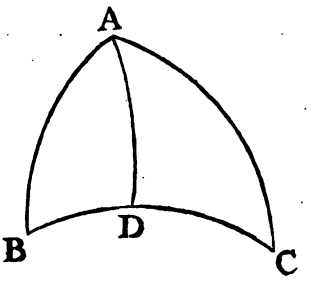
Scholion.

SI ſola inventio anguli C *proponeretur, poſſet indifferenter duci arcus perpendicularis vel ab angulo* A, *vel ab angulo* B.

Exemplum I.

ESto latus AB = 61°, 11′; angulus A = 92°, 18′; B = 73°, 24′. Reperietur angulus C = 61°, 46′; & AC = 72°, 22′.

Ac primò inquiratur angulus BAD, ope trianguli rectanguli ADB, qui reperietur eſſe 31°, 44′; ac ſubtrahatur ab angulo A: reſiduum 60°, 34′ erit valor anguli CAD. His poſitis,



Inventio anguli C.

993998	logar. ſin. 60°, 34′ anguli CAD.
945589	logar. coſ. 73°, 24′ anguli B.
1939587	ſumma.
972096	logar. ſubd. ſinus 31°, 44′ anguli BAD.
967491	reſid. pro log. coſ. 61°, 46′ ang. quæſiti C.

In-

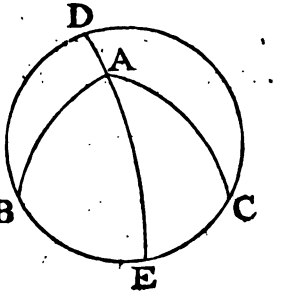
Inventio lateris AC.

969144	logar. cosin. 60°, 34′ anguli CAD.
974047	logar. cotang. 61°, 11′ lateris AB.
1943191	summa.
992968	logar. subd. cosin. 31°, 44′ anguli BAD.
950223	resid. pro logar. tang. 72°, 22′ lateris AC.

Exemplum II.

SI ponatur latus AC = 91°, 17′; A = 127°, 38′; B = 117°, 28′; quæ quantitates habent respectivè pro supplemento 88°, 43′; 52°, 22′; & 62°, 32′; reperietur angulus C 107°, 18′; & latus AC 111°, 42′ circiter.

Hac de causa quærere prius oportet angulum BAD, ope trianguli rectanguli ADB; hic angulus BAD reperietur 92°, 28′; qui additus angulo BAC = 127°, 38′, dabit summam 220°, 6′, quæ subducenda erit a 360°; residuum 139°, 54′ erit angulus CAD, quippe qui est supplementum hujus summæ ad gradus 360.



In-

Inventio anguli C.

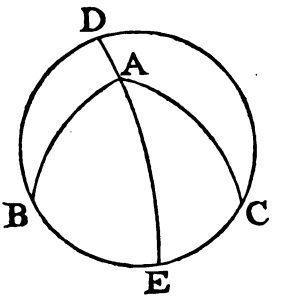
980897	logar. ſinus 40°, 6′ ſuppl. ang. CAD.
966392	logar. coſin. 62°, 32′ ſuppl. ang. B.
1947289	ſumma.
999960	logar. ſin. 87°, 32′ ſuppl. ang. BAD.
947329	reſ. pro log. coſ. 72°, 42′ ſup. 107°, 18′ ang. quæſ. C.

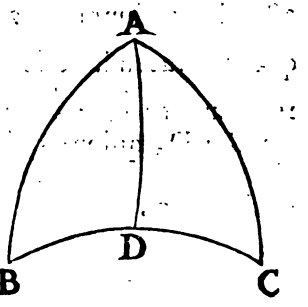
Inventio lateris AC.

988362	log. coſ. 40°, 6′ ſuppl. ang. CAD.
835029	log. cot. 88°, 43′ ſuppl. lat. AB.
1823391	ſumma.
863385	log. coſ. 87°, 32′ ſuppl. ang. BAD.
960006	reſid. pro logar. cotang. 68°, 17′ circiter
	ſuppl. 111°. 43′ circiter lateris quæſiti AC.

PROBLEMA IV.

423. *Datis duobus angulis, & latere unî eorum oppoſito, invenire I. tertium angulum, II. latus oppoſitum alteri angulo cognito, III. latus, quod a duobus angulis cognitis intercipitur.*





Ca-

Caſus I.

POnantur dati duo anguli B & C, & latus AB oppoſitum angulo C. Ut inveniatur angulus A, concipiatur oportet arcus perpendicularis AD ductus a vertice hujuſmet anguli, qui quæritur (*n.* 412.); nam tres partes cognitæ ſeſe immediatè non conſequuntur; mox quæratur angulus BAD per analogiam jam adhibitam in Probl. III. n. 420. Si AB hypotenuſa trianguli rectanguli ADB, eſſet quadrans circuli, latus BD eſſet pariter quadrans circuli (*n.* 284.); nam arcus AD ſemper ſupponitur infra 90 gradus (*n.* 413.); & conſequenter angulus oppoſitus BAD contineret 90 gradus (*n.* 274.). Deinceps, ut inveniatur angulus CAD, inſtituetur analogia n. 388.
Coſinus anguli B *eſt ad coſinum anguli* Q;
Uti ſinus anguli inventi BAD, *ad ſinum anguli* CAD; cujus ſpecies poterit eſſe indeterminata, ſi generatim dumtaxat conſiderentur partes cognitæ. Præcognoſci tamen poterit, aut determinari ſpecies anguli CAD, ex particulari quæſtione, cui præcedens analogia applicetur; quod idem intelligendum eſt de partibus quæſitis, in iis, qui conſequuntur, caſibus.

Si angulus B ſit acutus, angulus BAC erit ſumma, vel differentia angulorum BAD & CAD; prout angulus C erit acutus, aut obtuſus.

Si angulus B ſit obtuſus, angulus BAC erit differentia angulorum BAD & CAD, ſive horum angulorum ſupplementum ad gradus 360, prout angulus C erit acutus, aut obtuſus; ut alibi dictum eſt.

Caſus II.

424. LAtus AC, oppoſitum dato angulo B, habebitur per analogiam n. 386.

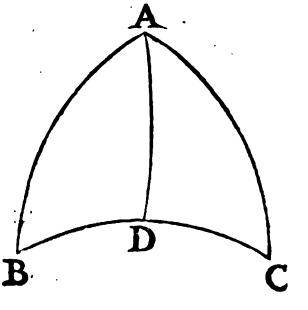
Uti

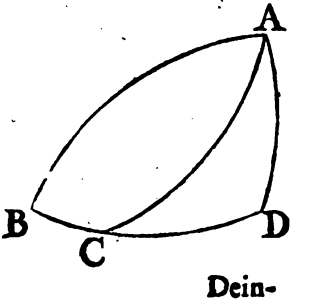
Uti ſinus anguli oppoſiti lateri cognito,
eſt ad ſinum hujus lateris;
Ita ſinus alterius anguli cogniti,
eſt ad ſinum lateris, quod eidem opponitur;
cujus ſpecies poterit eſſe indeterminata, ſpectatis dumtaxat tribus partibus cognitis.

Si angulus CAD eſſet rectus, latus oppoſitum CD eſſet quadrans circuli (*n.* 274.); & hypotenuſa AC trianguli ADC, ſimiliter eſſet quadrans circuli (*n.* 282.). In hoc caſu arcus perpendicularis AD totidem contineret gradus, quot angulus oppoſitus C (*n.* 334. 335.).

Caſus III.

425. UT habeatur latus BC, quæratur oportet ſegmentum BD per analogiam n. 321., deductam a triangulo rectangulo ADB, cujus hypotenuſa AB cognoſcitur, & angulus ABD eidem adjacens, hoc pacto:
Coſinus anguli dati B *eſt ad ſinum totum;*
Uti cotangens hypotenuſæ AB *eſt ad cotang. ſegmenti* BD;
quod erit in eadem ſpecie, in qua eſt hypotenuſa AB; cùm enim arcus perpendicularis ponatur minor quadrante circuli, angulus adjacens ABD eſt ſemper acutus, ſive ſpectet ad triangulum ABC, ſive eidem ſit exterior.





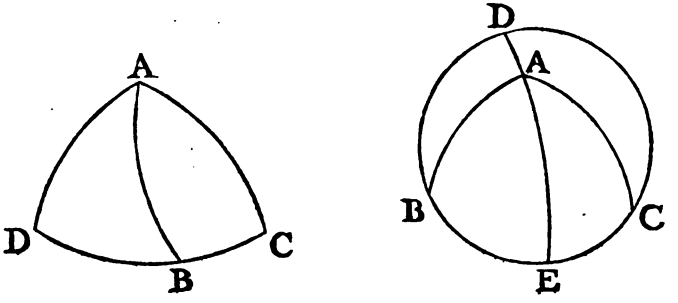
Dein-

Deinceps invenietur ſegmentum alterum CD per analogiam n. 392.

Tangens anguli C *eſt ad tangentem anguli* B;
Uti ſinus ſegmenti BD *eſt ad ſinum ſegmenti* CD;
cujus ſpecies poteſt non eſſe determinata a tribus partibus cognitis.

Itaque, ſi angulus B ſit acutus, ut in Figuris præcedentibus, latus BC erit ſumma, vel differentia ſegmentorum BD & CD, prout arcus perpendicularis AD cadet intra, vel extra triangulum ABC.

Si angulus B ſit obtuſus, latus BC erit differentia eorumdem ſegmentorum BD & CD, ſive ſupplementum horum arcuum ad 360 gradus, prout angulus C erit acutus, vel obtuſus (*n.* 410.).



PROBLEMA V.

426. *Cognitis tribus lateribus trianguli ſphærici, invenire angulos.*

Hujus reſolutionis methodus pendet a n. 400.

I. Duorum laterum anguli quæſiti accipiatur differentia, ſive exceſſus majoris lateris ſupra minus: hic exceſſus adjiciatur baſi ejuſdem anguli; ſumaturque ſemiſumma.

II. Hic idem exceſſus ſubducatur ab eadem baſi;

ſumaturque reſidui ſemiſſis, ſive ſemidifferentia.

III. Quæratur logarithmus ſemiſummæ, & logarithmus ſemidifferentiæ; hi duo logarithmi ſimul ſumpti, addantur duplo logarithmo radii, ſeu ſinus totius, ut habeatur ſumma.

IV. Ab hac ſumma ſubducatur ſumma logarithmorum duorum laterum angulum quæſitum comprehendentium; reſidui ſemiſſis, erit logarithmus ſemiſſeos ejuſdem anguli.

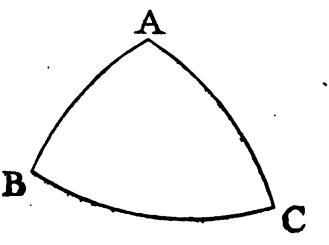
Exemplum. In triangulo ABC ſit AB = 52°, 22'; AC = 62°, 32'; BC = 72°, 42'; quæraturque angulus A.

I. Subducatur latus minus AB a majore AC; & exceſſus, ſeu differentia 10°, 10' addatur baſi BC; ſumma erit 82°, 52'; cujus ſemiſſis 41°, 26'.

II. Hic idem exceſſus 10°, 10' ſubducatur a baſi BC; differentia eſt 62°, 32'; cujus ſemiſſis 31°, 16'.

III. Quæratur logarithmus ſemiſummæ 41°, 26', & ſemidifferentiæ 31°, 16'; reperies 982069 & 971519: hos addes duplo logarithmo radii: ſumma erit 3953588.

IV. Ab hac ſumma ſubduces ſummam numerorum 989869 & 994806, qui ſunt logarithmi laterum AB, AC, nimirum, ſummam 1984675; & reſiduum erit 1968913; cujus ſemiſſis 984456 eſt logarithmus 44°, 21' 11/2", hoc eſt, logarithmus ſemiſſeos anguli A; Ergo angulus A eſt 88°, 43'.



Eo-

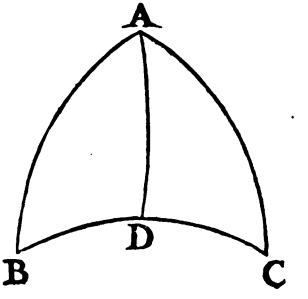
Eodem artificio reperientur duo reliqui anguli B & C.

Scholion I.

427. *HUjus operationis certitudo conſtare poterit per regreſſum demonſtrativum, ſi nimirum, dato angulo* A, *qui nuper inventus eſt,* 88° 43′ 1″, *quæratur per Problema I. latus* BC, *inveniaturque idem valor, qui reipſa reſpondet huic lateri* BC.

Scholion II.

428. *SI duo latera, puta,* AB, AC, *forent æqualia, multò faciliùs reſolvi poſſet idem Problema. Nam a puncto* A *ductus arcus perpendicularis* AD *in baſim* BC, *divideret triangulum* BAC *in duo triangula rectangula æqualia* ADB, ADC (*n.* 264.). *Itaque in quolibet triangulo rectangulo, puta,* ADB, *duæ partes cognitæ ſunt, præter angulum rectum in* D; *nimirum, latus* BD, *ſemiſſis notæ baſis* BC, *& hypotenuſa* AB; *ergo invenietur angulus* B (*n.* 344.). *Rurſum invenietur angulus* BAD (*n.* 343.); *qui angulus eſt ſemiſſis anguli totalis* BAC; *quoniam triangulum* ABC *dividitur bifariam ab arcu perpendiculari.*

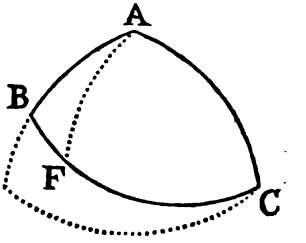


Scholion III.

429. SImiliter, *ſi unum laterum, puta,* AC, *ſit quadrans circuli, multò facilius reſolvitur Problema.*

Ab uno lateris AC *extremo* A, *vel* C, *tanquam polo, & intervallo hujus lateris, deſcribatur arcus* CE, *aut* AF. *Si deſcribatur arcus* CE, *producatur oportet arcus* AB *uſque ad occurſum arcus* CE, *ut habeatur triangulum* CEB, *rectangulum in* E (*n.* 230. 231.); *quia arcus* AE *tranſit per polum arcus* CE. *Jam verò in hoc triangulo cognoſcitur latus* BE, *quod eſt complementum arcus* AB; *præterea datur hypotenuſa* BC, *latus unum trianguli propoſiti; & conſequenter invenietur latus* CE, *quod eſt menſura anguli* BAC (*n.* 237.), *ſi adhibeatur analogia n.* 345.

Si deſcriptus foret arcus AF, *haberetur triangulum* AFB, *rectangulum in* F, *in quo cognoſcitur latus* BF, *tanquam exceſſus arcus dati* CB *ſupra quadrantem circuli* CF; *cognoſcitur inſuper hypotenuſa* AB *per hyp.; itaque per eamdem analogiam n.* 345. *invenietur latus* AF, *quod eſt menſura anguli* ACF; *hic enim arcus* AF *deſcriptus eſt a puncto* C, *tanquam polo.*



Scholion IV.

SI *angulus quæſitus, eſſet adjacens lateri, quod ponitur eſſe quadrans circuli, deſcribatur oportet arcus a vertice anguli quæſiti. Itaque, ſi quæratur angulus* BAC, *deſcribatur arcus* CE; *ſi quæratur angulus* ACB, *deſcribatur arcus* AF.

Sin

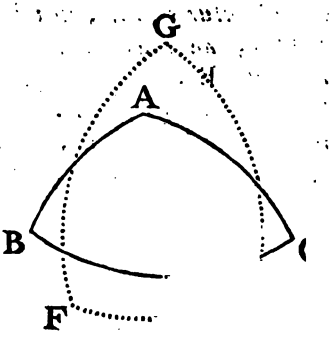
Sin autem inveniendus ſit angulus B, *oppoſitus quadranti circuli* AC, *deſcribi poterit arcus vel a puncto* A, *vel a puncto* C; *ſi deſcriptus fuiſſet* CE, *inquiretur angulus* CBE *ope trianguli* CEB, *rectanguli in* E; *& uſui erit analogia n.* 344.; *hic angulus* CBE *eſt ſupplementum anguli* ABC.

PROBLEMA VI.

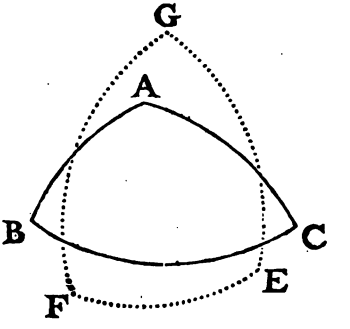
430. *Datis tribus angulis trianguli ſphærici, invenire latera.*

Reſolutio hujus Problematis eadem methodo præcedentis conficitur. Nam, ſi concipiatur ſecundum triangulum, cujus latera ſint ſupplementa angulorum primi trianguli propoſiti, demonſtrabitur, latera hujus primi trianguli fore pariter ſupplementa angulorum ſecundi trianguli. Itaque invenientur hæc latera quæſitis angulis ſecundi trianguli, ope ſuorum laterum, quæ ſunt cognita, quoniam hæc ſunt ſupplementa angulorum primi trianguli.

Exemplum. Eſto triangulum BAC, cujus angulus A ſit $88^{\circ}, 43'$; angulus B $68^{\circ}, 18'$; & angulus C $56^{\circ}, 2'$. Deſcribatur triangulum EFG, cujus tria latera ſint ſupplementa angulorum, qui primo triangulo reſpondent; nimirum, ponatur latus EF $91^{\circ}, 17'$; latus EG $111^{\circ}, 42'$; latus FG $123^{\circ}, 58'$. Ope præcedentis Problematis, cujus calculum mox ſubdam, quærantur anguli hujus ultimi trianguli: invenietur G $= 107^{\circ}, 18'$; F $= 117^{\circ}, 28'$;

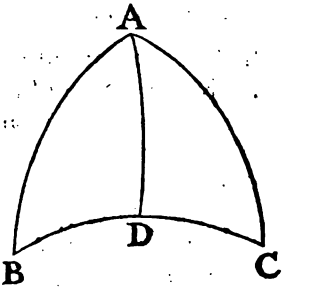


& E = 127° 1′, 37° 1′. Atqui ſupplementa horum angulorum ſunt 72° 1′, 42°; 62° 1′, 32°; & 52° 1′, 23°; Ergo BC = 72° 1′, 42°; AC = 62° 1′, 32°; AB = 52° 1′, 23°.



Scholion.

SI quando contingat, ut duo anguli trianguli propoſiti ſint æquales, multò facilius, quàm generali methodo reſolvi Problema poterit. Eſto triangulum BAC, *cujus duo anguli* B *&* C *ſint æquales: ducatur in baſim* BC *arcus perpendicularis* AD, *qui datum triangulum dividet in duo æqualia triangula rectangula (n.* 264.), *quorum anguli omnes cognoſcentur; puta, in triangulo* ADB, *angulus* D *rectus eſt, angulus* B *datus, & angulus* BAD *ſemiſſis dati. Itaque invenietur latus* BD, *& hypotenuſa* AB *per n.* 373. 374.



SY-

SYNOPSIS

Caſuum, in quibus tres partes cognitæ trianguli ſphærici, determinant reliquas.

VIdimus n. 250. & n. 257., duo triangula ſphærica fore perfectè æqualia,

I. Si latus unum, & duo anguli eidem adjacentes in primo triangulo, æquentur reſpectivè lateri, & duobus angulis adjacentibus in altero triangulo, ſingula ſingulis;

II. Si duo latera, & angulus ab iiſdem interceptus in uno triangulo, æquentur duobus lateribus, & angulo intercepto, in altero triangulo;

III. Si tria latera unius trianguli æquentur tribus alterius, ſingula ſingulis;

IV. Si tres anguli unius æquentur tribus alterius trianguli, reſpectivè.

His poſitis, evidenter conſequitur ex præcedentibus, partes incognitas fore determinatas per eas, quæ cognoſcuntur in Probl. I. de triangulis ſive rectangulis, ſive obliquangulis.

Illud etiam conſequitur, partes incognitas fore determinatas in Probl. III. in triangulis utriuſque ſpeciei.

Conſtat pariter, partes quæſitas eſſe determinatas in Probl. VI. in utraque triangulorum ſpecie.

Patet denique, partes quæſitas in Probl. V. trianguli obliquanguli, eſſe pariter determinatas.

Idem etiam conſtat in tribus Problematis de triangulis rectangulis, nimirum, II., IV. & V. In ſecundo fit ſuppoſitio, quòd præter angulum rectum, cognoſcatur pariter latus unum, & hypotenuſa; quod ſatis eſt, ut reliquæ partes determinentur; utì abunde con-

ſtare poterit ex analogiis adhibitis ad inveniendas eaſdem partes, & obſervationibus adjectis, ut harum partium ſpecies determinaretur; nimirum, ut determinaretur, an hæ partes eſſent majores, aut minores 90 gradibus. Hujuſmodi obſervationibus opus erat, ut cognoſceretur ſpecies partium; nam terminus analogiarum ultimus, eſt vel ſinus, vel tangens, vel ſecans; quæ convenire poſſunt duobus arcubus, vel duobus angulis, quorum unus ſit alterius ſupplementum. Itaque, quamvis analogia non determinet ſpeciem partis quæſitæ, tamen hæc ſpecies ſatis determinatur ex obſervationibus adjectis cuilibet analogiæ Problematis II.

Idem dicendum de Probl. V. in triangulis rectangulis.

Quod attinet ad IV. Probl., in quo, præter angulum rectum, ſuppoſitur cognitum latus unum, & angulus eidem oppoſitus, quamvis tres iſtæ partes cognitæ non ſufficiant ad determinandam ſpeciem reliquarum, tamen ex ſingulis analogiis cognoſcitur, partem quæſitam continere non poſſe niſi certum numerum graduum infra 90, aut alium numerum graduum, qui ſit ſupplementum primi; ſemperque ex particulari quæſtione dijudicari poterit ſpecies partis quæſitæ, an minor eſſe debeat, aut major gradibus 90 (*n.* 363.).

Eadem obſervatio pertinet ad II. & IV. Problema in triangulis obliquangulis.

AP-

APPENDIX.

De geometrica Logarithmorum origine, & conſtructione.

431. GEometria uſque adeò cum Arithmetica connexa eſt, ut altera alteri præire videatur, facemque præferre. Nam, quemadmodum in Geometria linearum magnitudines numeris ſæpe definiuntur; ita viciſſim in Arithmetica interdum expedit, ut numeri per lineas exponantur; quod ut præſtetur, aſſumatur oportet linea aliqua, quæ ipſa unitatem repræſentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps. Hac ratione quorumdam numerorum geneſis, & proprietates meliùs concipiuntur, ac multò clariùs in animo verſantur, quàm per abſtractos numeros.

Ut autem Tirones ſtatim aſſequantur, qua methodo, quave analogiâ Arithmetica logarithmorum per curvam geometricam logarithmicam repræſentari poſſit, paucis quædam attingam, quæ de progreſſionibus geometricis, & earum logarithmis fuſiùs expoſui in Commentariis Arith. univerſalis Lib. II. parte III. n. 160.

DEFINITIONES.

432. PRogreſſio *geometrica*, ſeu termini in continua proportione geometrica dici ſolent, quando per æquales rationes continuè proceditur; oriunturque continuè multiplicando per communis rationis exponentem, ſeu continuum multiplicatorem; creſcendo quidem, ſi continuus ille multiplicator ſit major unitate; decreſcendo, ſi minor.

Ty-

Typus progreſſionis in ratione dupla creſcentis, cujus communis multiplicator eſt $2 = m$.

$$2 . 2\times 2 . 2\times 4 . 2\times 8 . 2\times 16.$$

$$a . am . am^2 . am^3 . am^4 .$$

$$2 . 4 . 8 . 16 . 32 .$$

Typus progreſſionis in ratione ſubdupla decreſcentis, cujus continuus multiplicator eſt $\frac{1}{2} = \frac{1}{m}$; ſeu, quod eòdem recidit, cujus communis, & continuus diviſor eſt $2 = m$.

$$32 . \frac{1}{2}\times 32 . \frac{1}{4}\times 32 . \frac{1}{8}\times 32 . \frac{1}{16}\times 32 .$$

$$a . \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3} . \frac{a}{m^4} .$$

$$32 . 16 . 8 . 4 . 2 .$$

433. Progreſſio geometrica omnium ſimpliciſſima, & maximè naturalis, eſt ea, quæ ab 1 inchoatur, ut in ſequenti typo. In hoc caſu terminus ſecundus ab unitate, ſi progreſſio ſit creſcens, eſt communis multiplicator; ſin autem progreſſio ſit decreſcens, eſt communis diviſor.

$$1 . 2 . 2\times 2 . 2\times 4 . 2\times 8 . 2\times 16.$$

$$1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 .$$

$$1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32} .$$

$$1 . \frac{1}{a} . \frac{1}{a^2} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^4} . \frac{1}{a^5} .$$

434. In progreſſione geometrica, numeri cuilibet termino ſuffixi, non ſolùm poteſtatem ejuſdem, verùm etiam diſtantiam a primo deſignant; ac proinde vocari ſolent indices diſtantiæ, quam quiſque terminus ab unitate obtinet; puta, a^4, vel $\frac{1}{a^4}$, eſt in quarto ab unitate loco, progreſſionis vel creſcentis, vel decreſcentis; ſimiliter a^5, vel $\frac{1}{a^5}$, quinquies magis diſtat ab

unita-

unitate, quàm a, ſeu a^1, qui immediatè ſequitur unitatem.

435. Quamobrem loca terminorum progreſſionis numerantur ab unitate excluſivè; puta, $1^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5$. Hinc numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, ſupra progreſſionis terminos adſcripti, indicant quotus quiſque ſit ab unitate, cujus index eſt 0; nam unitas non diſtat a ſeipſa.

436. Eadem ſeries quantitatum geometricè proportionalium continuari poteſt utrinque, tam deſcendendo versùs ſiniſtram, quàm aſcendendo versùs dexteram; termini enim

$$\frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^1} \cdot 1^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 \text{ &c.}$$

ſunt omnes in eadem progreſſione geometrica.

437. Cùm autem diſtantia ipſius a^1 ab unitate, ſit versùs dexteram, & poſitiva, ſeu $+1$, diſtantia æqualis, in contrariam partem; ſcilicet diſtantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa, ſeu -1, qui erit index termini $\frac{1}{a}$; pro quo ſcribi pariter poteſt a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index -2 oſtendit, terminum in ſecundo loco ab unitate versùs ſiniſtram locari; idemque valet terminus a^{-2}, ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} eſt idem, ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim negativi oſtendunt terminos, ad quos pertinent, in partem diſcedere contrariam ei, qua ab unitate progrediuntur termini, quorum indices ſunt poſitivi; ac proinde ſeries quantitatum geometricè proportionalium utrinque continuata, deſcendendo versùs

sùs ſiniſtram ab unitate, & aſcendendo versùs dexteram, poterit etiam ſic exhiberi:

$a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . 1 . a^{1} . a^{2} . a^{3} . a^{4} . a^{5}$ &c.

438. Si inter terminos 1 & a inſeratur medius proportionalis, qui eſt $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$; nam ejus diſtantia ab unitate erit ſemiſſis diſtantiæ a ab unitate; adeoque pro $\sqrt{a}$ ſcribi poteſt $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſi inter a & a^2 inſeratur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$, ſeu $\frac{3}{2}$; nam ejus diſtantia erit ſeſquialtera diſtantiæ ipſius a ab unitate.

Si inter 1 & a inſerantur duo medii proportionales, horum primus eſt radix cubica ipſius a; cujus index debet eſſe $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille diſtat ab unitate, tertia dumtaxat parte diſtantiæ ipſius a; adeoque radix cubica ſcribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hæc uberiùs declarata, & demonſtrata invenies in meis Comment. Arith. univerſ. Lib. II. p. III. n. 195. His præmiſſis, ſit

LEMMA.

439. *SEries linearum geometricè proportionalium continuari poteſt utrinque ab unitate, tam deſcendendo versùs ſiniſtram, quàm aſcendendo versùs dexteram.*

Aſſumatur pro libito linea quævis 1, quæ unitatem repræſentet. Jam, ſi quælibet alia linea a in ſeipſam ducatur, quantitas a^2, quæ exinde prodit, non æſtimanda eſt tanquam duarum dimenſionum, ſeu, ut quadratum geometricum, cujus latus ſit linea a, ſed tanquam linea, quæ ſit tertia proportionalis lineæ pro unitate aſſumptæ, & alterius lineæ a.

Sic

Sic etiam, ſi a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3, non erit trium dimenſionum quantitas, ſeu cubus geometricus; ſed linea, quæ eſt quartus terminus in progreſſione geometrica, cujus primus terminus eſt 1, ſecundus a. Nam termini 1, a, a^2, a^3, a^4 &c. ſunt in continua ratione 1 ad a.

Similiter ab unitate versùs ſiniſtram continuari poteſt deſcendendo eadem ſeries geometrica a^{-1}, a^{-2} &c., utì nuper prædiximus; & quotlibet medii proportionales inſeri poſſunt.

Scholion.

440. *IN noſtris Commentariis Arith. univerſ. Lib. I. n. 8. cum Newtono multiplicationem definivimus illam eſſe, in qua quæritur nova quantitas, in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem. Hæc univerſalior notio genus omne quantitatum complectitur; neque tantùm fit per abſtractos numeros, ſed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, ſuperficies, pondera &c.; quatenus hæ ad aliquam ſui generis quantitatem, tanquam unitatem, relatæ, rationes numerorum exprimere poſſunt, & vices ſupplere.*

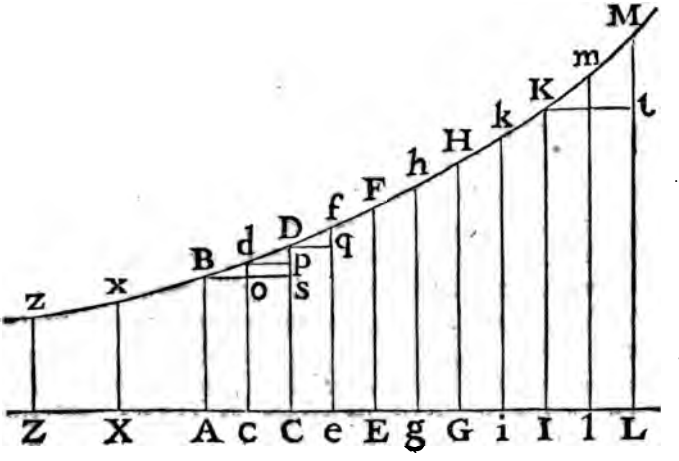
PRO-

PROPOSITIO I.

441. *Geneſis lineæ logarithmicæ.*

Reſolutio. Super linea AL, utrinque indefinitè extenſa, capiantur AC, CE, EG, GI, IL dextrorſum, & pariter AX, XZ &c. ſiniſtrorſum, omnes inter ſe æquales; & a punctis Z, X, A, C, E, G, I, L erigantur perpendiculares rectæ Zz, Xx, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ ſint omnes continuè proportionales, numeroſque repræſentent, quorum AB ſit unitas.

Lineæ AC, AE, AG, AI, AL, — AX, — AZ diſtantias numerorum ab unitate reſpectivè exponent, ſive locum, & ordinem, quem quiſque numerus in ſerie geometricè proportionalium obtinet, prout ab unitate diſtat. Ita AG, cùm ſit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, ſi modò CD ſit in primo. Sic LM erit in quinto loco, cùm ſit AL = 5 AC.



Quòd

Quòd ſi proportionalium extremitates z, x, B, D, F, H, K, M rectis lineis jungantur; figura zZ LM erit polygonum, pluribus, aut paucioribus conſtans lateribus, prout plures, aut pauciores in progreſſione termini fuerint.

Si rurſum partes AC, CE, EG, GI, IL biſecentur in punctis *c*, *e*, *g*, *i*, *l*, & ſimiliter excitentur perpendiculares *cd*, *ef*, *gb*, *ik*, *lm*, quæ ſint mediæ proportionales inter AB, CD, inter CD, EF &c., nova orietur proportionalium ſeries, cujus termini, incipiendo ab eo, qui proximè ſequitur unitatem, duplò plures ſunt, quàm in prima ſerie; & terminorum differentiæ minores fiunt; propiùſque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quàm prius.

Quin etiam in hac nova ſerie, rectæ AL, AC diſtantias terminorum LM, CD ab unitate exponent; nimirum, cùm AL decies major ſit, quàm *Ac*, erit LM decimus ſeriei terminus ab unitate. Similiter, quia *Ae* triplò major eſt, quàm *Ac*, erit *ef* tertius ſeriei terminus; & inter AB & *ef* erunt duo medii proportionales; at verò inter AB & LM erunt novem termini medii proportionales.

Finge jam linearum extremitates B, *d*, D, *f*, F, *b*, H &c. conjungi rectis lineis: habebitur novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus conſtans lateribus.

Sic, ſi continuò inter binos quoſque terminos inſerantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum ſeriei, ſicut & laterum polygoni, major quolibet dato numero, ſeu infinitus; latera verò ſingula magnitudine diminuta, evadent minora quavis data recta linea; ac proinde mutabitur polygonum in figuram curvilineam.

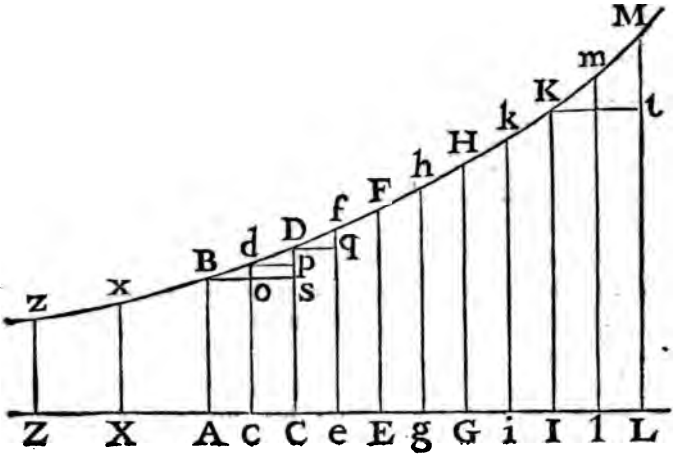
Curva ſic deſcripta, dicitur *logarithmica*; in qua, ſi numeri per rectas ad axem AL normaliter inſiſtentes, repræſententur, portio axis inter numerum quemlibet,

libet, & unitatem intercepta, oſtendit locum, ſeu ordinem, quem numerus ille obtinet in ſerie geometrica proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem diſtantium; puta, ſi AL ſit quintuplò major, quàm AC, ſintque ab unitate ad LM mille termini continuè proportionales, erunt ab unitate ad CD ducenti termini ejuſdem ſeriei; ſeu erit CD terminus ſeriei ducenteſimus ab unitate AB.

PROPOSITIO II.

442. *Geneſis ejuſdem curvæ logarithmicæ, duorum motuum compoſitione deſcriptæ.*

Reſolutio. Primus logarithmorum inventor Neperus concipit, eamdem curvam duobus motibus deſcribi, quorum unus æquabilis eſt, alter verò in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur; videlicet, ſi recta AB ſuper AL uniformiter incedat, adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribat; interea tamen ita creſcat AB, ut æqualibus



etiam

etiam temporibus incrementa capiat; quæ ſint toti lineæ creſcenti proportionalia; nimirum, ſi AB, progrediendo in *cd*, augeatur parte *od*; & hinc æquali tempore, quando in CD pervenerit, augeatur ſimili parte D*p*, ita ut D*p*:*dc*::*do*:AB, hoc eſt, incrementa D*p*, *do*, æqualibus temporibus facta, ſemper ſint totis *dc*, AB proportionalia; vel, ſi linea AB, regrediendo in contrariam partem, in ratione conſtanti ita minuatur, ut dum æqualia ſpatia AX, XZ pertranſit, decrementa patiatur AB—X*x*, X*x*—Z*z*, quæ ſint ipſis AB, X*x* proportionalia; Lineæ ſic creſcentis, aut decreſcentis terminus logarithmicam deſcribet. Nam, cùm ſit AB:*do*::*dc*:D*p*::DC:*fq*, erit componendo, AB:*dc*::*dc*:DC::DC:*fe*; & ita deinceps.

Corollarium I.

443. HInc logiſtica, ſeu logarithmica dicitur *linea illa curva, in qua ordinatæ ad æquales axis partes, ſunt geometricè proportionales*; nempe diviſo axe AL in quotlibet partes æquales AC, CE, EG &c., ſi ad earumdem terminos ordinatæ AB, CD, EF, GH &c. fuerint continuè proportionales; linea, quæ tranſit per puncta extrema B, D, F, H, & per extrema mediarum proportionalium, æquo ſemper intervallo duabus quibuslibet ordinatis interponendarum, logiſtica, ſeu logarithmica appellari conſuevit; eò quòd inveniendis logarithmis inſerviat.

Corollarium II.

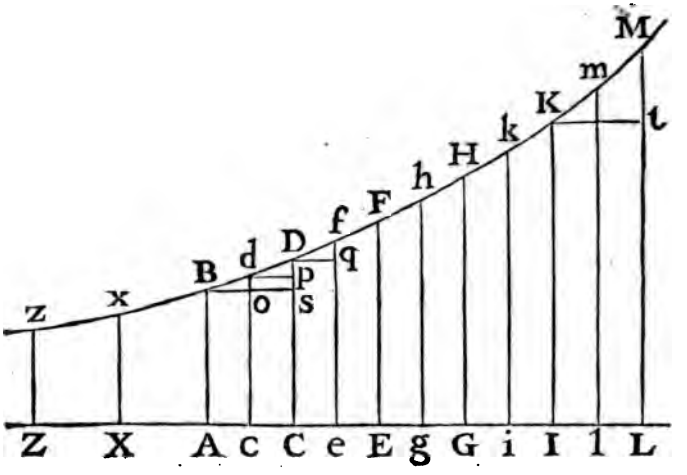
444. COnſtat etiam, curvam hac motuum compoſitione deſcriptam, ad axem AZ, tanquam *Aſymptoton*, propiùs accedere, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipſo convenire poſſe, dum linea AB, regrediendo in contrariam partem, in ratione conſtanti minui intelligitur. Continuatio quippe rationis AB ad X*x* per minores, ac minores terminos

in infinitum fieri poteſt, quin unquam minimus ejuſmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat; utì perſpicuum eſt ex doctrina progreſſionum geometricarum.

Sed & eadem ratione liquet, logiſticam B D H M in immenſum ſupra ipſam M L continuari poſſe; nec unquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, ſupremumque ejus punctorum fontem perveniri, ſed varia dumtaxat ejuſdem ſegmenta exhiberi abſciſſa per ordinatarum aliquam, veluti H G, vel M L; nec magis punctum B, quàm H, vel K, aut *x*, aut aliud quodvis pro logiſticæ capite ſtatui poſſe. Unde perinde eſt, undecunque incipias; ratio enim ordinatarum A B & C D tam bene ad majores terminos, quàm ad minores continuari poteſt.

Corollarium III.

445. EX hac logarithmicæ deſcriptione conſtat, *partes axis ita correſpondere ordinatis, quemadmodum logarithmi reſpondent naturalibus numeris*; ac proinde numeros omnes, qui per ordinatas repræſen-



tantur,

tantur, in æqualibus diſtantiis eſſe continuè proportionales; ſiquidem æqualiter creſcente axe, perinde æqualiter creſcit ordinatarum proportio; atque hæc erit primaria logiſticæ proprietas, per quam poterit expreſſiùs definiri.

Corollarium IV.

446. QUin etiam patet, quòd, ſi ſint quatuor numeri AB, CD, IK, LM tales, *ut diſtantia inter primum, & ſecundum ſit æqualis diſtantiæ inter tertium, & quartum, qualiſcunque ſit diſtantia ſecundi a tertio, erunt illi numeri proportionales.* Nam, quia diſtantiæ AC, IL ſunt æquales, erit AB ad incrementum D*s*, ut IK ad incrementum M*t*; unde componendo, AB:DC::IK:ML. Et reciprocè, ſi quatuor numeri fuerint proportionales, erit diſtantia inter primum, & ſecundum æqualis diſtantiæ inter tertium, & quartum.

DEFINITIO.

447. DIſtantia inter duos quoslibet numeros dicitur *logarithmus rationis* iſtorum numerorum; & metitur, non quidem ipſam rationem, ſed numerum terminorum in data ſerie geometrica proportionalium, progredientium ab uno numero ad alterum; definitque numerum rationum æqualium, quarum compoſitione efficitur numerorum ratio.

Corollarium V.

448. SI diſtantia IL inter duos quoſvis numeros IK, LM, dupla ſit diſtantiæ A*c* inter alios duos numeros AB, *cd*; *Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis poſteriorum.* Secetur bifariam IL in *l*. Quia A*c*=I*l*=*l*L, erit ratio IK ad *lm* æqualis rationi AB ad *cd* per Coroll. IV.; adeoque ratio IK ad LM, quæ eſt duplicata rationis IK ad *lm*,

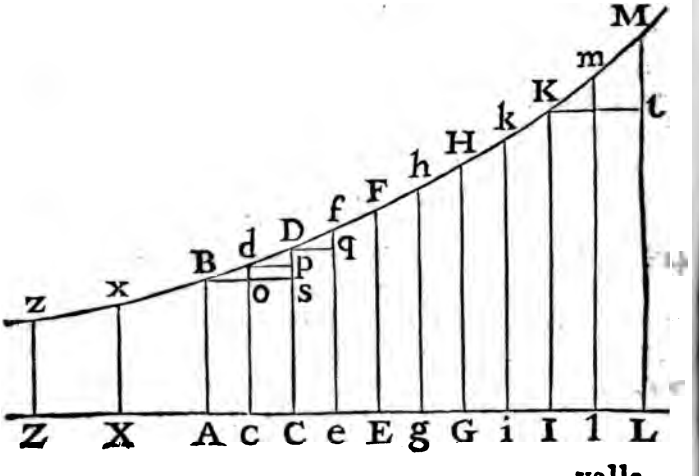
erit etiam, ex Elementis, duplicata rationis AB ad *cd*.

Similiter, ſi diſtantia EL ſit tripla diſtantiæ AC, erit ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD. Nam ob diſtantiam triplam, triplò plures erunt proportionales ab EF ad LM, quàm ſint ejuſdem rationis termini ab AB ad CD. Cùm autem omnis ratio componatur ex rationibus æqualibus intermediis, hinc ratio EF ad LM, ex triplò pluribus rationibus compoſita, triplicata erit rationis AB ad CD; atque ita porro de reliquis diſtantiis.

Corollarium VI.

449. ITaque numeri cujuslibet logarithmus, eſt logarithmus *rationis unitatis ad ipſum numerum*, vel eſt diſtantia inter unitatem, & illum numerum; ac proinde exponit poteſtatem, locum, & ordinem, quem quiſque numerus obtinet ab unitate in ſerie geometrica proportionalium.

Quod ut clariùs intelligas, & doctrina jam tradita in canone logarithmico illuſtretur, finge tibi proportionem, quam habet 1 ad 10, diviſam eſſe in inter-



valla,

valla, ſeu proportiunculas 10000000; ac proinde ab unitate uſque ad denarium incluſivè numerari terminos 10000000 minimos proportionales: numerus 10 erit in loco 10000000mo; ac per calculum invenies eſſe in eadem ſerie ab unitate uſque ad 2 proportionales terminos numero 3010300; hoc eſt, numerus binarius ſtabit in loco 3010300mo. Similiter ab unitate uſque ad 3 invenientur termini proportionales 4771213; qui numerus definit locum numeri ternarii. Quamobrem numeri 10000000, 3010300, 4771213 erunt logarithmi numerorum 10, 2, 3.

Corollarium VII.

450. OMnes itaque numeri in ſerie geometrica *erunt poteſtates aliquæ illius numeri, qui eſt ab unitate primus. Et poteſtatum indices ſunt numerorum logarithmi*. Si primus progreſſionis geometricæ terminus ab unitate dicatur x, erit ſecundus terminus x^1, tertius x^2 &c. Cùm autem ponatur numerus denarius ſeriei terminus 10000000^{mus}, erit $x^{10000000} = 10$; $x^{3010300} = 2$; $x^{4771213} = 3$; & ita deinceps.

Corollarium VIII.

451. CUm *logarithmi ſint diſtantiæ numerorum ab unitate*, erit logarithmus ipſius unitatis 0; nam unitas non diſtat a ſeipſa.

Quando logarithmi æſtimantur per diſtantias numerorum ab unitate, numeri ab unitate proportionaliter creſcentes, habent logarithmos poſitivos, ſeu ſigno + affectos; at fractiones, ſeu numeri ab unitate ſimiliter decreſcentes, habebunt logarithmos negativos, ſeu ſigno — affectos.

At ſi logarithmi initium capiant non ab unitate integrali, ſed ab unitate, quæ ſit in loco aliquo fractionum decimalium, puta, a fractione $\frac{1}{10000}$, tunc

omnes fractiones hac majores, habebunt logarithmos positivos; reliquæ minores, logarithmos negativos.

Corollarium IX.

452. NUmerorum geometricè proportionalium *logarithmi sunt omnes in progressione arithmetica*. Cùm enim in numeris continuè proportionalibus distantiæ sint æquales, erunt horum numerorum logarithmi æquidifferentes, seu in progressione arithmetica.

De Proprietatibus, & Usu Curvæ logarithmicæ.

QUamvis logarithmi ad facilitandum calculum trigonometricum fuerint primitus excogitati; tamen & in communibus Arithmeticæ operationibus maximo usui eosdem esse jam docuimus; ac præsertim viam aperiunt inveniendi terminum quemlibet in serie proportionalium sive crescente, sive decrescente; quæ supputatio, ubi agatur de fœnore composito ad plures annos, solet esse operosa in Arithmetica vulgari. Quamobrem, ne quid huic nostro Operi desit, hanc tractationem subnectam, si prius pauca quædam attingam de logisticæ proprietatibus, ex quibus hujusmodi praxes arithmeticæ proficiscuntur.

PROPOSITIO III.

453. *SI in axe logarithmicæ ubivis capiantur partes quælibet* SV, VY, YO *&c. æquales, & ad puncta* S, V, Y, O *&c. erigantur perpendiculares* ST, VX, YZ, OP *&c.; ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa* X*x*, Z*z*, P*p erunt totis proportionalia.*

Dem. Quoniam ST : VX :: VX : YZ :: YZ : OP,
erit dividendo; ST : X*x* :: VX : Z*z* :: YZ : P*p*;
& componendo, VX : X*x* :: YZ : Z*z* :: OP : P*p*.
Quod erat &c.

Hinc,

Hinc, ſi X*x* ſit pars quælibet rectæ ST, erit Z*z* eadem pars rectæ VX, & P*p* quoque eadem pars rectæ YZ; puta, ſi X*x* ſit $\frac{1}{20}$ ST, erit Z*z* $= \frac{1}{20}$ VX, & P*p* $= \frac{1}{20}$ YZ; ſive VX $=$ ST $+ \frac{1}{20}$ ST;

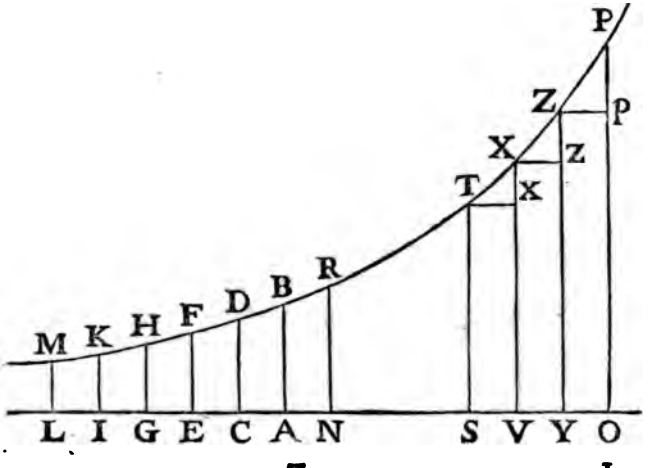
$$YZ = VX + \frac{1}{20} VX;$$

$$OP = YZ + \frac{1}{20} YZ.$$

PROPOSITIO IV.

454. *IN ſerie proportionalium creſcente, ſi logarithmus numeri* NR *multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujuſvis diſtantiam a primo termino, & productum addatur logarithmo termini primi, dabitur logarithmus iſtius termini.*

Demonſtratio. Fiat, ut ST ad VX, ita AB unitas ad NR: erit AN $=$ SV; adeoque rectæ SV, VY, YO &c. erunt ſingulæ æquales logarithmo ipſius RN.



Itaque AV logarithmus termini VX, erit æqualis AS + AN = logarithmo ipſius ST + log. ipſius NR.

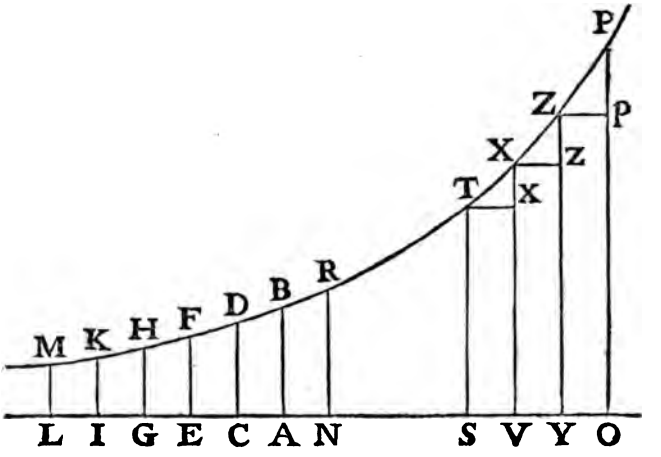
Item AY logarithmus termini YZ, æqualis erit AS + 2 AN = logarithmo ST + 2 log. NR.

Et AO logarithmus termini OP, æqualis erit AS + 3 AN = logar. ST + 3 log. NR.

Et univerſaliter, in ſerie proportionalium creſcente &c.

Corollarium.

AT ſi ſeries proportionalium ſit decreſcens, ſeu termini in continua ratione minuantur, & OP ſit primus, habebitur logarithmus alterius cujuſvis termini, multiplicando logarithmum numeri NR per numerum, qui exponit ejus termini diſtantiam a primo, & ſubducendo productum e logarithmo primi.



PRA-

PRAXIS ARITHMETICA

In ſupputatione fœnoris compoſiti ad plures annos.

455. SIt fœnoris compoſiti ſupputatio ineunda in ratione *6* per 100 in ſingulos annos; quippe tum erit, ut 100 ad 106, ſive, ut 1 ad $1\frac{6}{100}$, vel, ut 1 ad 1.06; ſic ſumma capitalis, ſeu principalis, ad ſummam fœnore auctam pro uno anno; adeoque multiplicanda erit ſumma principalis per 1.06 pro anno primo; quodque hinc prodit, multiplicandum erit per 1.06 pro anno ſecundo; & ſic continuè pro annorum numero, ut habeatur ſumma, quæ coaleſcit in fine tot annorum.

Exemplum. Eſto ſumma principalis 15 libræ, 17 ſolidi, & *6* denarii, juxta valorem monetæ noſtratis. Ut autem calculus evadat minùs impeditus, revocentur fractiones $\frac{17}{20}$ & $\frac{6}{12}$, nempe 17 ſolidi, & *6* denarii, ad fractiones decimales; ac ſint lib. 15.875; utì docuimus n. 55. Lib. I. Arith. univerſ. Ratio autem fœnoris *6* per 100 pro uno anno, per annos 12 continuanda ſit; numerus ergo 15.875 eſt 1.06, continuè multiplicandus duodecies; unde tandem prodibit 31.94362 —,

0. 15	875
	95250
1. 16	82750
1	0096500
2. 17	8371500
1	0702290
3. 18	9073790
1	1344427 +
4. 20	0418217 +
1	2025093 +
5. 21	2443310 +
1	2746599 —
6. 22	5189909 +
1	3511395 —
7. 23	8701304 —
1	4322078 +
8. 25	3023382 —
1	5181403 —
9. 26	8204785 —
1	6092287 +
10. 28	4297072 —
1	7057824 +
11. 30	1354896 +
1	8081294 —
12. 31	9436190 —

hoc

hoc eſt, reductis decimalibus ad priſtinam fractionum ſpeciem, lib. 31, ſol. 18, den. $10\frac{1}{2}$ ferè.

Scholion.

NOtabis, ſignis + & — deſignari exceſſum, vel defectum numerorum, facilè in praxi vel contemnendum, vel mutuò compenſandum.

PRAXIS LOGARITHMICA

In ſupputatione fœnoris compoſiti ad plures annos.

456. OMiſſis continuis multiplicationibus, per logarithmos ſic proceditur. Logarithmo ſummæ principalis addendus eſt logarithmus numeri 1.06 tot vicibus, quot ſunt anni, ut habeatur logarithmus ſummæ poſt tot annos emergentis; cui correſpondens numerus abſolutus, eſt ſumma quæſita.

Exemplum. Numeri 1.06, pro ratione fœnoris expoſiti, logarithmus eſt 0.0253058;
hujus duodecuplum pro num. annorum, eſt 0.3036696;
ſummæ principalis logarithmus eſt 1.2007137;
qui duo logarithmi ſimul juncti faciunt log. 1.5043833;
cui reſpondet numerus abſolutus 31.943562 proximè, ut conſtat ex tabulis, hoc eſt, facta reductione, lib. 31, ſol. 18, d. $10\frac{1}{2}$ ferè, ut prius.

Hinc per regreſſum ſolvuntur ſequentes quæſtiunculæ.

Que-

Quæſtio I.

DAto tempore, & fœnoris ratione, ut prius, cum ſumma oriunda 31.94362 —, *quæritur a qua ſumma principali hæc oriatur.*

Reſol. Ex ſummæ oriundæ logarithmo 1.5043833 ſubtrahatur 0.3036696, duodecuplum nempe logarithmi numeri 1.06; reſtabit 1.2007137 logarithmus quæſitæ ſummæ principalis.

1.5043833
0.3036696
1.2007137

Quæſtio II.

DAtis, ſumma oriunda, & ſumma principali, & tempore, invenire rationem fœnoris.

Reſol. Ex ſummæ oriundæ logarithmo 1.5043833 ſubtrahatur ſummæ principalis logarithmus 1.2007137; reſiduum 0.3036696 dividatur per numerum annorum; hoc eſt, hujus reſidui ſumatur pars duodecima 0.0253058; hæc erit logarithmus numeri 1.06 pro ratione fœnoris.

1.5043833
1.2007137
0.3036696 (12
(0.0253058

Quæſtio III.

DAtis, ſumma oriunda, & ſumma principali, & ratione fœnoris, invenire tempus, ſeu numerum annorum.

Reſolutio. Præcedentis ſubductionis reſiduum 0.3036696 per 0.0253058 logarithmum numeri 1.06 pro ratione fœnoris diviſum, dat quotientem 12; qui eſt numerus annorum, in quibus ex tali ſumma principali, ſecundùm hanc fœnoris rationem, talis proveniret ſumma.

0.3036696 (0.0253058
(12

Si-

Simili forma ſolvuntur aliæ quæſtiones, quæ ad ſupputationem fœnoris compoſiti ſpectant.

Quæſtio IV.

PAriter logarithmorum Arithmetica locum habet in nota illa quæſtione *de unitate continuè duplicanda*, quæ jactari ſolet, de equo vendendo ſecundùm numerum clavorum 24, quibus ſuffigi ſolent ungulis ſuis ſoleæ ferreæ. Poſito nimirum exiguo pretio pro clavo primo, ejuſque duplo pro ſecundo, hujuſque itidem duplo pro tertio, & ſic continuè duplicando pro clavis ſingulis, ad quam immenſam tandem ſummam perveniatur.

Cujus quidem quæſtionis occaſionem primam eam fuiſſe exiſtimat Joannes Wallis in opere arithmetico cap. 31; Nimirum, cùm Seſſa quidam indus ludum latrunculorum inveniſſet primus, Regique ſuo indicaſſet; a Rege, cui ſummè placuit, juſſus præmium, quod vellet, inventionis ſuæ petere; petiit ille, ut pro abaci luſorii areola prima daretur tritici granum unum, pro ſecunda duo, & ſic continuè duplicando ſecundùm areolarum 64 numerum. Cùmque hoc Regi, qui præmium ſatis amplum datum iri vellet, diſplicuiſſet, quòd tam exiguum petiiſſet, Seſſa reſpondit, ſe hoc exiguo contentum fore; quod itaque, cùm Rex dari juſſiſſet, miratus eſt ſummopere, ubi ad tam incredibilem quantitatem excreſcere deprehenderit, ut per univerſum terrarum orbem tantundem tritici non ſuppeteret.

Quantus ſit futurus horum granorum numerus, inveſtigabitur, numerum 1 continuè duplicando vicibus 63, ut habeatur numerus loco ultimo debitus; & una porro vice, ut habeatur omnium ſumma; quippe duplum ultimi, uno minùs, eſt omnium ſumma.

Id

Id autem per logarithmos expeditiùs fiet; nimirum, ſi ipſi 0 logarithmo unitatis, addatur numeri binarii logarithmus 0.3010299 per 64 multiplicatus, hoc eſt, 19.2659136; cui convenit numerus abſolutus, major quidem, quàm 18446,00000,00000,00000, ſed minor, quàm 18447,00000,00000,00000. In hiſce autem immenſis adeo ſupputationibus conſulendæ ſunt tabulæ majores logarithmorum.

Qui plura volet de logiſticæ proprietatibus, adeat opus egregium P. Guidonis Grandi, quod inſcribitur: *Geometrica demonſtratio Theorematum Hugenianorum circa logiſticam, ſeu logarithmicam lineam.*

FINIS.

IN-

INDEX.

NEceſſitas, & origo Trigonometriæ. *num.* 1.
Uſus ſcalæ geometricæ incertus in maximis intervallis. *ibid.*
Varia inter ſe collata Theoremata. 2. 3. 4.
Trigonometriæ origo adumbrata. 5. 6.
Trigonometria quid ſit; ejuſque partitio in planam, & ſphæricam. 7.

PARS I.

De Trigonometria plana, ſeu rectilinea.

DEFINITIONES.

QUid ſint Sinus, Tangentes, Secantes &c. 8. *uſque ad* 15.
Quomodo hæ lineæ in circulo conſideratæ, traducantur ad latera trianguli rectanguli. 16. *uſque ad* 24.
Iconiſmus omnium notionum. 25.
Latera cujuſvis trianguli acutanguli, & obtuſanguli, ad arcus circuli conſtanter referuntur. 26.
Cuilibet arcui, aut angulo ſuus reſpondet ſinus &c. 27.
Invenire ſinus, tangentes, & ſecantes anguli cujuslibet, & arcus. 28.
In tabulis non exhibetur magnitudo abſoluta ſinuum, ſed tantùm reſpectiva. 29.
Canon Trigonometricus linearis. 31. 34.

De conſtructione Tabularum.

Diviſio ſemidiametri ab antiquis Aſtronomis invecta. 36.
Commodior Recentiorum diviſio. 38. 39.
Theor. In circulis inæqualibus, ſinus, tangentes, & ſecantes arcuum ſimilium, eamdem habent rationem ad radios ſuorum circulorum. 40.
Theor. Si quadrilaterum circulo ſit inſcriptum, factum duarum diagonalium æquatur ſummæ factorum, laterum oppoſitorum. 42.

Probl.

Probl. Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam ſupplementi ad ſemicirculum. *num.* 43.
Probl. Cognitis chordis duorum arcuum, invenire chordam ſummæ eorumdem arcuum. 44.
Probl. Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus dupli. 45.
Probl. Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus tripli. 46.
Probl. Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus quintupli. 47.
Probl. Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam ſemiſſeos ejuſdem arcus. 48.
Probl. Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam trientis ejuſdem arcus. 49.
Coroll. Eadem methodo invenietur chorda quintæ partis alicujus arcus. 50.
Probl. Ope præcedentium Problematum invenire chordas arcuum quadrantis, ab arcu duorum minutorum uſque ad 90 gradus, continuo duorum minutorum augmento. 51.
Probl. Invenire ſinus omnes uno tantùm minuto differentes, uſque ad gradus 45. 52.
Probl. Dato ſinu cujuſvis arcus, complementi ſinum invenire. 53.
Coroll. Cognitis ſinubus ab uno minuto ad grad. 45, cognoſcuntur reliqui ad grad. 90. 54.
Probl. Inventis ſinibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire tangentes omnes. 55.
Theor. Sinus totus eſt medius proportionalis inter tangentem arcus, & tangentem ſui complementi. 57.
Coroll. Cognitis tangentibus ab uno minuto ad gradus 45, cognoſcuntur reliquæ tangentes ad grad. 90. 58.
Probl. Cognitis tangentibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire ſecantes. 59.
Theor. Tangens arcus grad. 45, æquatur radio. 60.
Theor. Secans arcus grad. 60, æquatur diametro. 61.
Probl. Canonem Trigonometricum ſinuum, tangentium, & ſecantium conſtruere. 62.

De

De uſu Tabularum.

Probl. Dato quovis arcu, aut angulo, eruere e tabulis ſinum ipſi reſpondentem. *num.* 63.

Probl. Datis ſinibus binorum arcuum, qui inter ſe parum differant, hoc eſt, quarum differentia non ſit major 45 minutis, invenire ſinum cujuſcunque intermedii arcus dati. 64.

Probl. Dato quovis arcu, qui contineat gradus, & minuta prima, eruere e tabulis ſinum &c. ipſi arcui reſpondentem. 65.

Probl. Invenire ſinum unius, vel plurium ſecundorum minutorum. 66.

Probl. Invenire ſinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam ſecunda contineat. 67.

Probl. Dato ſinui, vel tangenti &c. correſpondentem arcum, aut angulum in eodem canone invenire. 68.

APPENDIX.

Obſerv. I. Quid cauſæ fuerit, cur tutior, & commodior viſa fuerit diviſio radii in particulas 10000000, vel ſaltem 100000, quàm in pauciores. 69.

Obſerv. II. Quid præterea agendum, ut tabula ſinuum exquiſitiùs conſtruatur, poſito ſinu toto partium 100000, aut etiam pauciorum. 70.

Obſerv. III. Exponitur ratio, cur abjectis duabus primis figuris ex ſinu quocunque, reſpectu ſinus totius 10000000, relinquatur idem ſinus reſpectu ſinus totius 100000, licet prior ille non ſit exquiſitè inventus. 71.

Obſerv. IV. Si ad ſinum quemcunque reſpectu ſinus totius 100000, adjiciantur duæ ciphræ ad dexteram, fit idem ſinus reſpectu ſinus totius 10000000. 72.

Obſerv. V. In abjiciendis tamen a ſinu invento totidem ciphris, quot fuerant adjunctæ ſinui toto, cautio altera habenda eſt, ut ad ſinum, quoad fieri poſſit, accuratiſſimè inveniendum accedamus. 73.

Obſerv. VI. Quid repræſentent numeri canonis trigonometrici, & quarum rerum ſint ſymbola. 74.

PARS II.

Analyſis Trianguli rectilinei.

Theor. I. IN omni triangulo rectangulo ſinus totus eſt ad ſinum alterutrius duorum angulorum acutorum, utì hypotenuſa eſt ad latus eidem angulo oppoſitum. *num.* 75.

Coroll. Hinc permutando, & invertendo, eliciuntur duæ reliquæ analogiæ, quoties hypotenuſa in quæſtionem cadit. 76.

Coroll. Cognitis angulis in triangulo rectangulo, etiam laterum proportio cognoſcitur. 77.

Theor. II. In omni triangulo rectangulo ſinus totus eſt ad tangentem unius, aut alterius duorum angulorum acutorum, utì latus adjacens huic angulo, eſt ad latus oppoſitum eidem angulo. 78.

Coroll. Hinc quoties hypotenuſa in quæſtionem non cadit, duæ analogiæ locum habent. 79.

Theor. III. In omni triangulo rectangulo radius eſt ad ſecantem alterutrius anguli acuti, utì latus adjacens huic angulo, eſt ad hypotenuſam. 80.

Coroll. Tres analogiæ. 81.

Coroll. Eadem hypotenuſa ſecans eſt utriuſvis angulorum acutorum. 82.

Coroll. Modus alter inveniendi laterum proportionem ex angulis cognitis. 83.

Theor. IV. In quolibet triangulo rectilineo latera eamdem inter ſe rationem habent, quam ſinus angulorum ipſis oppoſitorum. 84.

Coroll. In quolibet triangulo proportiones laterum habentur, ſi lateribus ſinus angulorum oppoſitorum adſcribantur. 85.

Coroll. Datis angulis magnitudo abſoluta laterum decerni non poteſt, niſi ipſorum unum innoteſcat. 86.

Coroll. Hinc in omni triangulo acutangulo, & rectangulo duæ ſemper analogiæ locum habent; in obtuſangulo autem ſubſtituendus erit ſinus ſupplementi anguli obtuſi. 87.

Theor. V. In omni triangulo obtuſangulo, ſinus unius, aut alterius

terius ex duobus angulis acutis, eſt ad ſinum ſupplementi anguli obtuſi, utì latus oppoſitum angulo acuto, eſt ad latus oppoſitum angulo obtuſo. *num.* 88.

Theor. VI. In omni triangulo, ut ſumma duorum quorumvis laterum ad eorumdem differentiam; ſic tangens ſemiſummæ angulorum iiſdem lateribus oppoſitorum, eſt ad tangentem ſemidifferentiæ eorumdem. 89.

Coroll. In omni triangulo ſumma laterum, differentia laterum, tangens ſemiſummæ angulorum oppoſitorum, & tangens ſemidifferentiæ eorumdem, ſunt termini proportionales. 90.

Theor. VII. In omni triangulo, ut eſt latus maximum ad ſummam reliquorum; ita horum differentia eſt ad differentiam inter ſegmenta facta a perpendiculari, ab angulo oppoſito demiſsà in latus maximum. 91.

Coroll. In omni triangulo latus maximum, ſumma laterum reliquorum, differentia eorumdem, differentia ſegmentorum lateris maximi, ſunt termini proportionales. 93.

Analyſis Trianguli rectanguli.

Probl. I. Datis, hypotenusà, & angulo adjacente, reliqua latera invenire. 101.

Probl. II. Datis, hypotenusà, & uno latere, invenire acutos angulos, & latus alterum. 102.

Probl. III. Datis, crure, & angulo oppoſito, invenire hypotenuſam. 103.

Probl. IV. Duobus lateribus datis, quærere utrumque angulum acutum, & hypotenuſam. 104.

De uſu Tangentium, & Secantium.

Probl. V. Datis, latere, & angulo adjacente, quærere latus oppoſitum. 105.

Probl. VI. Datis, latere, & angulo adjacente, invenire hypotenuſam. 108.

Probl. VII. Datis, hypotenusà, & uno latere, invenire angulum ab iiſdem interceptum. 109.

Probl. VIII. Cognità hypotenusà, & angulo adjacente, quærere latus adjacens eidem angulo. 110.

Analyſis Trianguli obliquanguli.
Probl. IX. Datis angulis, & uno latere, invenire latera reliqua. *num.* 113.
Lemma. Si a ſemiſumma duarum quantitatum ſubtrahatur ſemidifferentia, relinquitur quantitas minor; ſi verò ſemiſummæ duarum quantitatum addatur ſemidifferentia, prodit quantitas major. 115.
Probl. X. Datis duobus lateribus, & angulo ab iiſdem intercepto, reliquos angulos invenire. 117.
Probl. XI. Datis duobus lateribus, & angulo intercepto, invenire tertium latus. 120.
Probl. XII. Datis tribus lateribus, quærere angulum quemvis. 121.
Probl. XIII. Datis duobus lateribus trianguli obliquanguli, & dato angulo oppoſito uni eorum laterum, quærere angulum oppoſitum reliquo dato lateri. Oportet autem angulum quæſitum eſſe ſpecie præcognitum. 122. 123.
Synopſis ſolutionis trigonometricæ trianguli rectanguli, & obliquanguli. *ibid.*

PRAXIS TRIGONOMETRICA

Altimetriæ, & Longimetriæ.

Definitiones. 124. *uſque ad* 130.
Probl. I. Diſtantiam in una dumtaxat extremitate acceſſibilem metiri. 131.
Coroll. Uſus Problematis in Ichnographia, & Architectura militari. 133.
Probl. II. Invenire diſtantiam inter duo objecta, ambo inacceſſibilia, quæ tamen conſpici poſſint. 135.
Coroll. Hinc per datum punctum duci poteſt parallela rectæ inacceſſibili. 136.
Probl. III. Diſtantiam inacceſſam montis, vel turris per duas ſtationes metiri. 137.
Probl. IV. Altitudinem inacceſſam montis, vel turris metiri. 138.
Probl. V. Altitudinem acceſſibilem metiri. 139.
Probl. VI. Altitudinem nubis metiri. 140.
Probl. VII. Ichnographiam Regni, aut Provinciæ trigonometricè perficere. 141.

Ob-

OBSERVATIONES

Fallaciarum complurium, quæ in praxim trigonometricam Altimetriæ, & Longimetriæ ſolent irrepere.

Obſerv. I. ERror vel minimus ſub angulo altitudinis valde parvo commiſſus, multò majorem diſtantiæ cauſat errorem, quàm defectus idem ſub angulo altitudinis magno. *num.* 142.

Obſerv. II. Quoties duabus ſtationibus menſuranda eſt altitudo, aut diſtantia, tantum debet eſſe intervallum ſtationum, quantum ſatis eſt, ut differentia angulorum obtineatur. 146.

Obſerv. III. Dato quovis altitudinis angulo in ſtatione una, definire, quanto opus ſit ſtationum intervallo, ut acquiratur in ſtatione altera angulus altitudinis, differens gradu uno, aut pluribus. 148.

Obſerv. IV. Definiri pariter trigonometricè poteſt, quæ ſit proportio altitudinis ad diſtantiam ſub variis angulis. 149.

Obſerv. V. Non tutò ex qualibet diſtantia altitudines menſurantur. 150.

Obſerv. VI. Ex omni ea diſtantia ſatis tutò altitudo menſurabitur, ad quam ipſa proportionem habeat ſenſibilem. 151.

Obſerv. VII. Quantum erroris invehat rotunditas terræ in altitudinum menſuram. 152.

Obſerv. VIII. Quamvis rotunditas terræ multùm detrahat altitudini menſurandæ, eadem tamen nihil ferè officit menſurationi diſtantiæ. 153.

Obſerv. IX. Præcipuus, & frequentior error, quo altitudinum dimenſio vitiatur, ex defectu perpendiculi. 154.

Obſerv. X. Definiri poteſt quantitas erroris, ex defectu perpendiculi in altitudinis menſuram derivata. 155.

Obſerv. XI. Datis omnibus iiſdem, quæ ſupra, ſub angulo altitudinis vel nimis parvo, vel valde magno, major evadet, ac ſenſibilior error, qui oritur ex defectu perpendiculi. 160.

PARS III.

De Canone logarithmico.

Definitio. LOgarithmi ſunt numeri arithmeticè proportionales, adjuncti, aut reſpondentes numeris geometricè proportionalibus. *num.* 162.

Vel, logarithmi ſunt numeri artificiales, apti ad ſolvendam multiplicationem ſola additione, & diviſionem ſola ſubtractione. 163.

Logarithmorum ſpecies præſtantiſſima, ac commodiſſima. 165.

De Logarithmorum proprietatibus, & inventione.

Lemma. I. Si fuerint quatuor numeri arithmeticè, ſive continuè, ſive non continuè, proportionales, ſumma extremorum æquabitur ſummæ mediorum. Et contra. 168.

Lemma. II. Si fuerint tres numeri arithmeticè proportionales, ſumma extremorum æquabitur duplo medii. Et contra. 169.

Theor. I. Si quatuor numeri ſint geometricè proportionales, ſumma ex logarithmis extremorum, æquabitur ſummæ ex logarithmis mediorum. Et contra. 170.

Coroll. Quatuor numerorum geometricè proportionalium datis tribus, quartus logarithmicè invenietur. 171.

Theor. II. Si ſint tres numeri geometricè proportionales, ſumma ex logarithmis extremorum, æquabitur duplo logarithmi medii. Et contra. 173.

Coroll. Trium numerorum geometricè proportionalium datis duobus, tertius logarithmicè invenitur. 174.

Theor. III. Cùm unitatis logarithmus eſt o, ſumma ex logarithmis numerorum multiplicandi, & multiplicantis, æquatur logarithmo producti. 175.

Theor. IV. Si unitatis logarithmus ſit o, logarithmus cujuſcunque numeri duplicatus facit logarithmum quadrati, triplicatus logarithmum cubi ejuſdem numeri. 176.

Theor. V. Poſito unitatis logarithmo ciphra, ſeu o, logarithmus numeri dividendi, æquatur logarithmis diviſoris, & quotientis ſimul. 178.

Theor. VI. Exiſtente unitatis logarithmo ciphra, ſi cujuſpiam

numeri

numeri logarithmus biſecetur, hoc eſt, ejuſdem ſumatur dimidium, proveniet logarithmus quadratæ radicis; ſi capiatur tertia pars, habebitur logarithmus radicis cubicæ numeri ejuſdem. *num.* 179.
Coroll. Hinc totus pendet uſus logarithmorum in operationibus arithmeticis. 181.
Probl. Scopum canonis logarithmici aperire. 182.
Probl. Invenire logarithmos omnium numerorum, qui primi vocantur, quique terminis progreſſionis geometricæ decuplæ interjecti ſunt. 183.
Probl. Invenire logarithmos omnium numerorum compoſitorum. 185.
Probl. Cognitis logarithmis omnium numerorum ab 1 uſque ad 1000, canonem logarithmicum producere uſque ad 10000, ad 100000 &c. 186.

OBSERVATIONES

In conſtructione Tabularum.

Obſerv. I. QUid cauſæ ſit, cur numeri progreſſionis decuplæ 1, 10 &c. totidem ciphris augeantur, quot logarithmus denarii. 187.
Obſerv. II. Leges characteriſticæ in tabulis logarithmicis. 188.
Obſerv. III. Cur logarithmus denarii augendus ſit tribus ſaltem ciphris, ut logarithmi aliorum numerorum inveniantur. 189.
Obſerv. IV. Cur logarithmi ſine ullis fractionibus in canone diſponi poſſint; cùm tamen ſæpe fractiones continere deberent. 190.
Obſerv. V. Logarithmus cujuſvis numeri indicat, quot proportionum minimarum interjiciantur inter unitatem & ipſum numerum, ſive deſignat diſtantiam, quam habet idem numerus ab unitate. 191.
Obſerv. VI. Quo pacto logarithmi numerorum etiam naturalium 2, 3, 4, 5 &c. ſint indices, ſaltem quàm proximè, proportionum minimarum, quæ inter unitatem, & numerum quemvis interjiciuntur. 192.

De uſu Tabularum.

Probl. I. Dato numero abſoluto, non excedente 1000 maximum tabularum, ejus logarithmum e tabulis elicere. *num.* 193.
Probl. II. Dati numeri excedentis 1000, maximum tabularum, quibus uteris, invenire logarithmum vero proximum. 200.
Probl. III. Dato logarithmo non excedente 3.0000000 maximum tabularum, ad quem canonis logarithmici extenſio continuata ponatur, invenire in eodem canone numerum eidem reſpondentem. 205.
Probl. IV. Dato logarithmo excedente 3.0000000, nempe ultimum tabulæ, qua uteris, invenire in eodem canone numerum eidem reſpondentem. 207.
Probl. V. Dato logarithmo negativo, invenire numerum eidem congruum. 210.
Probl. VI. Dati cujuſcunque ſinus logarithmum invenire. 211.
Coroll. Logarithmi tangentium, & ſecantium, eadem methodo obtinentur. 212.

De uſu conſtructi Canonis.

Probl. VII. Datis gradibus cujuſvis arcus, eruere e tabulis logarithmum ſinus ipſis reſpondentem. 213.
Probl. VIII. Dato logarithmo ſinus, invenire arcum ipſi reſpondentem. 214.
Probl. IX. Cognitis angulis acutis, & hypotenusâ trianguli rectanguli, invenire latera. 215.
Probl. X. Datis, uno latere, & angulis trianguli rectanguli, invenire aliud latus. 216.
Probl. XI. Cognitis duobus lateribus trianguli rectanguli, invenire acutos angulos. 217.
Probl. XII. Cognitis duobus lateribus, & angulo intercepto, in triangulo obliquangulo, invenire reliquos angulos. 218.

PARS

PARS IV.

De Triangulis ſphæricis.

DEFINITIONES, ET PRINCIPIA.

Defin. I. GEneſis ſphæræ, ejuſque elementa. *num.* 219. 220. 221.

Coroll. Si ſphæra ſecetur quocunque plano, communis interſectio ejuſdem cum ſphæra erit circulus. 222.

Coroll. Circuli, qui tranſeunt per centrum ſphæræ, ſunt inter ſe æquales, & omnium maximi. 223.

Coroll. Circuli maximi ſe omnes mutuò bifariam ſecant; & communis interſectio planorum eorumdem eſt diameter ſphæræ. 224.

Coroll. Per duo quævis puncta aſſumpta in ſuperficie ſphæræ, poteſt duci circulus maximus. 226.

Defin. II. Axis ſphæræ eſt ſola diameter fixa, circa quam ſphæra convertitur.

Poli ſphæræ ſunt puncta extrema axis.

Axis circuli eſt linea recta, quæ tranſit per ejus centrum, & eſt plano ejuſdem circuli perpendicularis.

Poli circuli ſunt duo puncta extrema ejuſdem axis, poſita in ſuperficie ſphæræ. 228.

Coroll. Polus quilibet circuli æquidiſtat ab omnibus punctis ſuæ circumferentiæ. 229.

Coroll. Si maximus circulus tranſeat per polos alterius maximi circuli, huic erit perpendicularis. Et reciprocè. 230. 231.

Coroll. I. Si maximus circulus tranſit per polos alterius, hic quoque tranſibit per polos primi.

II. Si plures arcus ſeſe interſecent in polo alterius circuli, erunt omnes eidem perpendiculares.

III. A puncto, quod non ſit polus ſui arcus, unicus arcus perpendicularis in eumdem duci poteſt. 232.

Coroll. Polus quilibet diſtat gradibus 90 ab omnibus punctis ſui arcus, vel circumferentiæ. 233.

Coroll. Si in circumferentia circuli maximi accipiantur duo puncta, quæ non ſint invicem ſeparata per ſemicircumferentiam, horum quodlibet diſtare non poterit gradibus 90

ab alio puncto; quod non ſit polus ejuſdem circuli. *num.* 234.

Coroll. Si duo puncta arcus minoris ſemicircumferentiâ circuli, diſtent ſingula gradibus 90 ab alio puncto, hoc punctum erit polus ejuſdem arcus.

Sin autem duo puncta ſint extremitates arcus æqualis ſemicircumferentiæ, poterunt ſingula diſtare gradibus 90 ab aliquo puncto, quod non ſit polus ejuſdem. 235.

Defin. III. Angulus ſphæricus dicitur ille, quem in ſphæræ ſuperficie duo maximorum circulorum arcus ſeſe mutuò ſecantes continent; & æqualis eſt inclinationi duorum planorum utriuſque maximi circuli. 236.

Coroll. Dato angulo ſphærico, ſi concipiatur tertius circulus, cujus polus ſit ſummitas anguli ſphærici, arcus hujus circuli, interceptus a duobus lateribus, eſt menſura anguli ſphærici. 237.

Coroll. Vertex anguli ſphærici eſt polus arcus, qui eumdem angulum metitur. 238.

Coroll. Menſura anguli ſphærici eſt perpendicularis ſuis lateribus. Et reciprocè. 239.

Coroll. Si bina anguli latera æquent ſingula quadrantem circuli, arcus, qui baſis eſt, metitur eumdem angulum. Et reciprocè. 240. 241.

Coroll. Si duo arcus maximorum circulorum occurrant in duobus punctis, anguli oppoſiti ſunt æquales. 242.

Coroll. Duo maximorum circulorum arcus, quorum unus minor ſit ſemicircumferentiâ circuli, non poſſunt claudere ſpatium in ſuperficie ſphæræ. 243.

Coroll. Si duo latera anguli ſphærici tranſeant viciſſim per polos alterius lateris, angulus erit rectus. Et reciprocè, ſi angulus ſit rectus, latus alterum per alterius polum tranſibit. 245.

Coroll. Anguli ad verticem oppoſiti, ſunt æquales. Item anguli, qui ſunt deinceps conſequentes, æquantur duobus rectis. 246.

Defin. IV. Triangulum ſphæricum dicitur illud, quod continetur in ſuperficie ſphæræ tribus maximorum circulorum arcubus, qui dicuntur ejus latera. Et conſideratur inſtar pyramidis triangularis, cujus vertex ſit in centro ſphæræ, & baſis ſit portio ſuperficiei ſphæricæ, terminata tribus arcubus

cubus maximorum circulorum. *num.* 247.

Triangulum ſphæricum, ſicuti rectilineum, dividitur in æquilaterum, iſoſceles, & ſcalenum; ſimiliter in rectangulum, obtuſangulum, & acutangulum. 248.

Coroll. Hinc proprietates quædam triangulis ſphæricis, ac rectilineis communes deducuntur. 250.

Coroll. Quælibet duo trianguli latera reliquo ſunt majora. 252.

Theor. I. Trianguli latera ſunt circumferentiâ circuli minora. 253.

Theor. II. Quodlibet trianguli latus minus eſt ſemicircumferentiâ circuli. 254.

Theor. III. Si tres vertices trianguli ſphærici ſint poli trium arcuum, ex quibus triangulum aliud conſtat, quodvis trium laterum ſecundi erit ſupplementum angulorum oppoſitorum primi. Et reciprocè. 255.

Coroll. Triangula æquiangula ſunt etiam æquilatera. 257.

Theor. IV. Trianguli ſphærici tres anguli ſunt majores duobus rectis, & minores ſex rectis. 259.

Coroll. Datis duobus angulis trianguli ſphærici, determinari non poteſt valor tertii.

Et quò majora ſunt latera trianguli ſphærici, eò majores quoque evadunt anguli, quamvis non eadem proportione. 261.

Theor. V. In triangulis iſoſcelibus, anguli ad baſim ſunt æquales. Et reciprocè, ſi anguli ad baſim fuerint æquales, triangulum erit iſoſceles. 262.

Coroll. Omne triangulum æquilaterum eſt æquiangulum. Et viciſſim. 263.

Theor. VI. Si ab angulo verticali, intercepto a lateribus æqualibus trianguli iſoſcelis, demittatur arcus, qui baſim bifariam ſecet, I. triangulum dividitur in duo æqualia triangula; II. idem arcus eſt baſi perpendicularis. 264.

Coroll. Si ab eodem angulo demittatur arcus in baſim perpendicularis, hic dividet I. triangulum iſoſceles in duo æqualia triangula; II. bifariam quoque ſecabit & eumdem angulum verticalem, & baſim. 265.

Coroll. Si arcus bifariam ſecet angulum verticalem, bifariam quoque ſecabit triangulum iſoſceles, & erit baſi perpendicularis. 267.

Coroll.

Coroll. Hinc, ſi triangulum iſoſceles unam habeat ex dictis quatuor conditionibus, tres reliquæ elicientur. *num.* 268.

Theor. VII. In omni triangulo ſphærico major angulus majori lateri ſubtenditur. Et viciſſim. 269.

Theor. VIII. In omni triangulo ſphærico, ſi ſumma duorum laterum ſit æqualis, vel major, aut minor ſemicircumferentiâ circuli, angulus internus, oppoſitus uni lateri, erit æqualis, vel major, vel minor angulo externo, adjacente eidem lateri. 270.

Coroll. Duo triangula ſphærica poſſunt eſſe inæqualia, quamvis duo anguli unius ſint æquales duobus alterius, ſinguli ſingulis, & latus unum uni æquale; quæ duo latera æqualibus angulis opponantur. 271.

Theor. IX. In omni triangulo ſphærico, ſi angulus internus, oppoſitus uni lateri, ſit æqualis, aut major, vel minor angulo externo, adjacenti eidem lateri, erit ſumma duorum laterum æqualis, aut major, vel minor ſemicircumferentiâ circuli. 272.

De Triangulis rectangulis.

Theor. X. In omni triangulo rectangulo crura angulum rectum continentia, ſunt ejuſdem affectionis cum angulis oppoſitis. Et reciprocè. 274.

Coroll. In omni triangulo rectangulo, ſi alterum duorum crurum anguli recti, ſit æquale, vel minus, vel majus quadrante circuli, hoc idem latus erit pariter æquale, vel minus, vel majus hypotenusâ. 275.

Theor. XI. In quovis triangulo, ſi ab angulo verticali in baſim perpendicularis arcus demiſſus cadat intra triangulum, uterque angulorum ad baſim erit ejuſdem affectionis; ſi cadat extra, erit diverſæ affectionis. 276.

Coroll. Et reciprocè. 277.

Theor. XII. In omni triangulo rectangulo, ſi crus unum anguli recti minus ſit quadrante circuli, hypotenuſa erit in eadem affectione, ſeu ſpecie, in qua eſt latus alterum. 278.

Coroll. Si duo crura trianguli rectanguli ſint ejuſdem affectionis, ideſt, utrumque vel majus, vel minus quadrante, hypotenuſa minor erit quadrante circuli. 279.

Scho-

Scholion. Si duo crura anguli recti ſint quadrantes circuli, hypotenuſa erit pariter quadrans. *num.* 280.

Coroll. Si duo crura anguli recti differant ſpecie, hoc eſt, alterum minus ſit, & alterum majus quadrante circuli, hypotenuſa erit quoque major quadrante. 281.

Scholion. Si duo latera anguli recti ita differant ſpecie, ut alterum ſit quadranti æquale, & alterum quadrante majus, vel minus, hypotenuſa erit pariter quadrans. 282.

Coroll. Si hypotenuſa ſit quadrante minor, duo latera erunt ejuſdem ſpeciei; ſi quadrante major, duo latera ſpecie different. 283.

Scholion. Si hypotenuſa ſit quadrans circuli, neceſſe eſt, ſaltem alterutrum duorum crurum, eſſe quadrantem circuli. 284.

Coroll. Si anguli adjacentes hypotenuſæ, ſint in eadem ſpecie, hypotenuſa minor erit quadrante. 286.

Coroll. Si ſint in diverſa ſpecie, hypotenuſa major erit quadrante. 287.

Coroll. Et reciprocè. 288.

Scholion. Si duo anguli adjacentes hypotenuſæ, ſint ambo recti, vel rectus alter, & alter obliquus, hypotenuſa erit quadrans circuli. Et reciprocè. 289.

Coroll. In triangulo rectangulo, ſi latus, & angulus adjacens eidem lateri, & hypotenuſæ, ſint in eadem ſpecie, hoc eſt, vel utrumque majus, vel utrumque minus quadrante circuli, hypotenuſa minor erit quadrante. 290.

Scholion. In triangulo rectangulo, ſi latus, & angulus eidem adjacens, ſint ambo graduum 90, hypotenuſa erit pariter graduum 90. 291.

Coroll. Si latus, & angulus adjacens ſint in diverſa ſpecie, hoc eſt, alterum minus, & alterum majus gradibus 90, hypotenuſa major erit quadrante. 292.

Scholion. Si latus eſſet quadrans circuli, & angulus adjacens obliquus, hypotenuſa eſſet pariter quadrans. 293.

Coroll. Si hypotenuſa ſit minor quadrante circuli, latus quodlibet, ejuſque angulus adjacens ſunt in eadem ſpecie. Et rurſum, erunt in diverſa ſpecie, ſi hypotenuſa ſit major quadrante. 294.

Scholion. Si hypotenuſa æquet quadrantem circuli, latus

quod-

quodlibet, ejuſque angulus adjacens, eſſe poſſunt ſingula graduum 90. *num.* 295.

Coroll. Si angulus adjacens lateri, minor ſit gradibus 90, erit hoc latus ejuſdem ſpeciei, in qua eſt hypotenuſa. 296.

Scholion. Quando angulus adjacens lateri, excedit 90 gradus, vel ab iiſdem deficit, ſi hypotenuſa eſt quadrans circuli, latus erit quoque quadrans. 297.

Coroll. Si tres anguli trianguli ſint acuti, tria latera erunt ſingula minora quadrante circuli. 298.

Scholion. Propoſitio converſa hujus corollarii non eſt in omni caſu vera. 299.

Coroll. Si tria latera trianguli ſint ſingula majora quadrante circuli, tres anguli erunt obtuſi. 300.

Scholion. Propoſitio converſa hujus corollarii non eſt vera in omni caſu. 301.

Coroll. Si tria latera trianguli ſingula æquent quadrantem circuli, tres anguli erunt recti. Et reciprocè. 302.

Defin. V. Quid ſint Sinus, Tangens, & Secans anguli ſphærici. 303.

THEORIA

Sinuum &c. in Triangulo ſphærico rectangulo.

Theor. I. IN omni triangulo ſphærico rectangulo ſinus totus, ſive radius eſt ad ſinum hypotenuſæ, utì ſinus utriuſvis angulorum adjacentium hypotenuſæ, eſt ad latus prædicto angulo oppoſitum. 304. &c.

Coroll. Sinus angulorum proportionales ſunt ſinibus laterum oppoſitorum. 310.

Theor. II. In omni triangulo ſphærico rectangulo radius eſt ad ſinum alterutrius lateris, utì tangens anguli intercepti ab eodem latere, & hypotenusà, eſt ad tangentem lateris oppoſiti. 312.

Coroll. Demonſtrantur reliqui caſus, in quibus eadem analogia locum habet. 313.

Lemma. Dato triangulo rectangulo, cujus latera ſint ſingula minora quadrante circuli, ſi certa lege, qualis exprimitur in Lemmate, producantur latera, habebuntur nova trian-

triangula rectangula, quorum partes erunt æquales partibus primi trianguli, aut earum complementis. *num.* 314.
Coroll. Radius, ſeu ſinus totus eſt ad ſinum anguli adjacentis hypotenuſæ, utì coſinus, ſeu ſinus ſecundus lateris, cui adjacet idem angulus, eſt ad coſinum anguli oppoſiti huic lateri. 315.
Coroll. Sinus totus eſt ad coſinum unius lateris, utì coſinus alterius lateris eſt ad coſinum hypotenuſæ. 316.
Coroll. Aliæ ex aliis analogiæ. 317. &c.
Coroll. Sinus totus eſt ad coſinum anguli adjacentis uni lateri, utì cotangens hujus lateris eſt ad cotangentem hypotenuſæ. 321.
Coroll. Sinus totus eſt ad coſinum hypotenuſæ, utì tangens anguli adjacentis hypotenuſæ, eſt ad cotangentem alterius anguli, ejuſdem hypotenuſæ. 322.
Coroll. Aliæ analogiæ calculo perutiles. 323. 324.
Monitum I. An, & qua methodo in aliqua analogia termini cognomines alicujus trianguli invicem ſubſtitui poſſint, manente ſemper vera proportione. 325.
Monitum II. Expoſitæ analogiæ quomodo aptari poſſint omnibus triangulis rectangulis. 326.
Monitum III. Sex analogiæ, uſui magis utiles. 327. &c.
Theor. III. In triangulo ſphærico rectangulo, ſi latus unum ſit quadrans circuli, latus alterum tot gradus continet, quot angulus oppoſitus. 334.
Theor. IV. Et viciſſim, ſi in eodem triangulo latus unum majus, aut minus quadrante, contineat totidem gradus, quot angulus oppoſitus, latus alterum erit quadrans circuli. 335.
Theor. V. Radius, ſeu ſinus totus eſt medius proportionalis inter ſinum arcus, & coſecantem ejuſdem arcus, ſive ſecantem ſui complementi. 336.
Theor. VI. Tangentes duorum arcuum, vel duorum angulorum ſunt inter ſe reciprocè, utì eorum cotangentes, ſive reciprocè, utì tangentes ſuorum complementorum. 338.

Partitio Problematum. *num.* 340.
Probl. I. Datis duobus cruribus, invenire I. duos angulos iiſdem oppoſitos, II. hypotenuſam. 341. &c.
Probl. II. Datâ hypotenusâ, & altero crurum, quærere I. angulum dato cruri oppoſitum, II. angulum dato cruri adjacentem, III. crus reliquum. 343. &c.
Appendix variarum obſervationum in triangulis ſphæricis rectangulis. 349. &c.
Probl. III. Dato crure, & angulo intercepto ab eodem crure, & hypotenusâ, invenire I. angulum dato lateri oppoſitum, II. latus alterum, III. hypotenuſam. 354. &c.
Probl. IV. Datis, crure, & angulo eidem oppoſito, invenire I. angulum interceptum inter latus cognitum, & hypotenuſam, II. latus alterum, III. hypotenuſam. 360. &c.
Probl. V. Cognitâ hypotenusâ, & altero angulorum eidem adjacentium, quærere I. angulum reliquum ejuſdem hypotenuſæ, II. latus dato angulo oppoſitum, III. latus dato angulo adjacens. 367. &c.
Probl. VI. Datis duobus angulis adjacentibus hypotenuſæ, quærere I. latera, II. hypotenuſam. 373. &c.

PRAXIS ASTRONOMICA

Trianguli ſphærici rectanguli.

Probl. I. SOlis declinationem ad ſingulos gradus Eclypticæ ſupputare; & tabulam declinationum conſtruere. 377.
Probl. II. Aſcenſionem rectam ſingulorum graduum Eclypticæ ſupputare. 378.
Probl. III. Angulum Eclypticæ, & Meridiani invenire. 379.
Probl. IV. Data declinatione Solis, quæ obſervatione cognoſcitur, habetur ejus aſcenſio recta, & locus in Eclyptica, longitudo, declinatio, & angulus Eclypticæ, & Meridiani. 380.
Probl. V. Amplitudinem ortivam graduum Eclypticæ invenire. 381.

De Climatibus.

Probl. VI. Invenire latitudinem, per quam terminatur Clima. *num.* 382.

De Crepuſculis Quæſtiunculæ.

Quæſt. I. An crepera illa, & dubia lux mane ante Solis ortum, & veſpere poſt ejus occaſum conſpicua, quæ Crepuſculum dicitur, ab Athmoſphæræ illuminatione oriatur. 383.

Quæſt. II. An ex duratione Crepuſculi inveniri poſſit altitudo aeris. 384.

Quæſt. III. An ex data duratione Crepuſculi, & declinatione Solis, ejus depreſſio infra horizontem inveſtigari poſſit. Et viciſſim. 385.

THEORIA, ET ANALYSIS

Trianguli ſphærici obliquanguli.

Theor. I. IN omni triangulo ſphærico obliquangulo, ſinus angulorum, ſinibus oppoſitorum laterum directè ſunt proportionales. 386.

Theor. II. In omni triangulo ſphærico obliquangulo, ab angulo verticali in oppoſitam baſim demiſſo arcu perpendiculari, erunt ſinus ſecundi, ſeu coſinus laterum adjacentium eidem angulo, ſinibus ſecundis, ſeu coſinibus ſegmentorum ad baſim, directè proportionales. 387.

Theor. III. Iiſdem poſitis, ſinus angulorum verticalium ſunt directè proportionales ſinibus ſecundis, ſeu coſinibus angulorum ad baſim. 388.

Theor. IV. Iiſdem poſitis, ſinus ſecundi, ſeu coſinus angulorum verticalium ſunt directè proportionales cotangentibus laterum. 389.

Theor. V. Iiſdem poſitis, coſinus angulorum verticalium ſunt reciprocè proportionales tangentibus laterum. 390.

Theor. VI. Iiſdem poſitis, ſinus ſegmentorum baſeos ſunt directè proportionales cotangentibus angulorum ad eamdem baſim. 391.

Theor.

Theor. VII. Iiſdem poſitis, ſinus ſegmentorum baſeos ſunt reciprocè proportionales tangentibus angulorum ad baſim. *num.* 392.
Lemma. I. Dato triangulo ſphærico iſoſcele, datàque chordà, quæ vicem baſis obit, ſi per verticem ducatur recta, quæ ſit tangens circuli, cujus circumferentia tranſeat per tres vertices dati trianguli; dico, hanc rectam fore parallelam datæ chordæ. 393.
Lemma. II. Dato triangulo ſphærico obliquangulo, cujus duo latera ſint inæqualia, determinari poteſt arcus, qui ſit exceſſus ſemiſummæ trium laterum vel ſupra majus latus, vel ſupra minus. 394.
Coroll. Hujus arcus determinari poteſt ſinus. 395.
Theor. VIII. Iiſdem ſtantibus, I. ſi in triangulo ſphærico, quod non ſit æquilaterum, producatur minus latus unius anguli, donec æquetur majori, II. ſi a majori latere ſubducatur exceſſus, III. ſi ducantur arcus maximorum circulorum; dico, rectangulum factum a ſinibus ſemiſſium horum arcuum, æquari rectangulo facto a ſinibus differentiarum laterum anguli alterius, adjacentis prædicto minori lateri, a ſemiſumma trium laterum. 396.
Theor. IX. In omni triangulo ſphærico, rectangulum factum a ſinibus laterum anguli cujuſvis, eſt ad quadratum ſinus totius, utì rectangulum factum a ſinibus differentiarum horum laterum a ſemiſumma trium laterum trianguli, eſt ad quadratum ſinus ſemiſſeos ejuſdem anguli. 397.
Lemma. Iiſdem ſtantibus, differentia majoris lateris a ſemiſumma trium laterum, æquatur ſemidifferentiæ baſeos, & exceſſus ejuſdem majoris lateris ſupra minus. 398.
Theor. X. Rectangulum factum a ſinibus laterum anguli cujuſvis, eſt ad rectangulum factum a ſinu ſemiſummæ baſeos, & exceſſus majoris lateris ſupra minus, in ſinum ſemidifferentiæ baſeos, & ejuſdem exceſſus; utì quadratum ſinus totius eſt ad quadratum ſinus ſemiſſeos prædicti anguli. 399.

Analyſis Trianguli ſphærici obliquanguli.

Partitio Problematum. 400.
Regulæ generales in triangulis obliquangulis. 402. &c.
Probl. I. Datis duobus lateribus trianguli ſphærici, & angulo ab

ab iiſdem intercepto, invenire I. duos reliquos angulos, II. tertium latus. *num.* 414. &c.
Probl. II. Datis lateribus duobus, & angulo uni eorum oppoſito, invenire I. angulum alteri lateri cognito oppoſitum, II. angulum a lateribus datis comprehenſum, III. latus tertium. 417. &c.
Probl. III. Dato quovis latere, & angulis eidem adjacentibus, invenire I. tertium angulum, II. duo reliqua latera. 420. &c.
Probl. IV. Datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, invenire I. tertium angulum, II. latus oppoſitum alteri angulo cognito, III. latus, quod a duobus angulis cognitis intercipitur. 423. &c.
Probl. V. Cognitis tribus lateribus trianguli ſphærici, invenire angulos. 426. &c.
Probl. VI. Datis tribus angulis trianguli ſphærici, invenire latera. 430.
Synopſis caſuum, in quibus tres partes cognitæ trianguli ſphærici, determinant reliquas. *ibid.*

APPENDIX.

De geometrica Logarithmorum origine, & conſtructione.

Definitiones. 432. &c.
Lemma. Series linearum geometricè proportionalium continuari poteſt utrinque ab unitate, tam deſcendendo versùs ſiniſtram, quam aſcendendo versùs dexteram. 439.
Prop. I. Geneſis lineæ logarithmicæ. 441.
Prop. II. Geneſis ejuſdem curvæ logarithmicæ, duorum motuum compoſitione deſcriptæ. 442.
Coroll. Hinc logiſtica dicitur linea illa curva, in qua ordinatæ ad æquales axis partes, ſunt geometricè proportionales. 443.
Coroll. Hinc conſtat, curvam logarithmicam ad axem, tanquam Aſymptoton, propiùs accedere, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipſo convenire poſſe. 444.
Coroll. Conſtat etiam, partes axis ita correſpondere ordinatis,

tis, quemadmodum logarithmi reſpondent naturalibus numeris. *num.* 445.

Coroll. Hinc etiam patet, quod ſi ſint quatuor numeri tales, ut diſtantia inter primum, & ſecundum ſit æqualis diſtantiæ inter tertium, & quartum, qualiſcunque ſit diſtantia ſecundi a tertio, erunt illi numeri proportionales. 446.

Defin. Diſtantia inter duos quoslibet numeros dicitur logarithmus rationis eorumdem. 447.

Coroll. Si diſtantia inter duos quoſvis numeros dupla ſit diſtantiæ inter alios duos numeros, ratio duorum priorum erit duplicata rationis poſteriorum. 448.

Coroll. Itaque numeri cujuslibet logarithmus, eſt logarithmus rationis unitatis ad ipſum numerum. 449.

Coroll. Et omnes numeri in ſerie geometrica ſunt poteſtates aliquæ illius numeri, qui eſt ab unitate primus. Et poteſtatum indices ſunt numerorum logarithmi. 450.

Coroll. Cùm logarithmi ſint diſtantiæ numerorum ab unitate, erit logarithmus ipſius unitatis o. 451.

Coroll. Numerorum geometricè proportionalium logarithmi ſunt omnes in progreſſione arithmetica. 452.

De proprietatibus, & uſu Curvæ logarithmicæ.

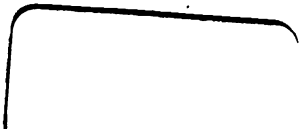
Prop. III. Si in axe logarithmicæ capiantur partes quælibet æquales, & ab earumdem extremis punctis erigantur perpendiculares, ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua perpendicularium incrementa erunt totis proportionalia. 453.

Prop. IV. In ſerie proportionalium creſcente, ſi logarithmus alicujus numeri multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujuſvis diſtantiam a primo termino, & productum addatur logarithmo termini primi, dabitur logarithmus iſtius termini. 454.

Praxis Arithmeticæ communis in ſupputatione fœnoris compoſiti ad plures annos. 455.

Praxis logarithmica. 456.

Quæſtiunculæ logarithmicæ de ſupputatione fœnoris compoſiti. *ibid.*

FINIS.

MAR 1 0 1954